Светлов Н.М. Функциональная матрица модели Эрроу-Дебре // Доклады ТСХА: Вып. 274. М.: Изд-во МСХА, 2002. - с. 600-605.

УДК 519.8

Функциональная матрица модели Эрроу-Дебре

Н.М. Светлов

В [3] предложен метод анализа обусловленности стоимости процессами производства, основанный на представлении математических моделей теории стоимости в форме балансовых систем. При его посредстве для ряда теоретико-стоимостных моделей доказано, что стоимость представляет собой технологически обусловленные совокупные затраты любого блага на производство данного блага. Однако существуют модели, представление которых в форме балансовых систем затруднено тем, что они оперируют нечисловыми отношениями. В их числе — модель Эрроу-Дебре [2].

Особое место этой модели и её модификаций в теории стоимости обусловлено тем, что она представляет собой конкретизацию модели Л. Вальраса [4], заложившей основы современных представлений о свободном ценообразовании как условии и средстве достижения конкурентного равновесия. В рамках вальрасовской методологии представляет интерес вопрос о том, обладают ли цены в моделях конкурентного равновесия свойствами, аналогичными присущим значениям стоимости в моделях, рассмотренных в [3].

Цели статьи — показать, что модель Эрроу-Дебре может быть представлена в форме балансовой системы при выполнении дополнительных предположений, не ограничивающих экономической интерпретации; установить, что математическая форма обусловленности цен конкурентного равновесия в модели Эрроу-Дебре производственными процессами не отличается от установленной в [3].

Введём следующие обозначения: i — индекс блага; I — множество благ; m — индекс предприятия; M — множество предприятий; k — индекс потребителя; K — множество потребителей; $\succsim_k$ — отношение предпочтения потребителя k на множестве X_k его наборов потребительских благ $\mathbf{x}_k = (x_{ik})$; $\mathbf{s}_k = (s_{ik}) = \mathrm{const}$ — неотрицательный вектор начальных запасов, принадлежащих потребителю k; J_m — множество идентификаторов технологических процессов, доступных предприятию $m \in M$; Y_m — производственно-технологическое множество, включающее векторы потоков $\mathbf{a}_{jm} = (a_{ij})$, где $m \in M$, $i \in I$, $j \in J_m$; $\mathbf{a}_m = (a_{im})$ — вектор потоков, выбранный предприятием m из числа доступных ему векторов $\mathbf{a}_{jm}$; $\mathbf{p} = (p_i)$ — вектор цен; $\boldsymbol{\pi} = (\pi_m)$ — вектор значений прибыли предприятий; $\boldsymbol{\alpha}_k = (\alpha_{km})$ — вектор долей потребителя k в прибыли каждого предприятия.

Состояние конкурентного равновесия $(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_m, \mathbf{p})$, $k \in K$, $m \in M$ в модели Эрроу-Дебре, если опустить несущественные для наших целей формальные требования, может быть описано следующими условиями.

Баланс благ:
$$\sum_{k \in K} \mathbf{x}_k - \sum_{k \in K} \mathbf{s}_k - \sum_{m \in M} \mathbf{a}_m \leqq \mathbf{0}. \tag{1}$$

Бюджетные ограничения:
$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_k \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{s}_k \rangle - \langle \boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\pi} \rangle \leqslant 0,\ k \in K. \tag{2}$$

Прибыль предприятий:
$$\pi_m - \langle \mathbf{p}, \mathbf{a}_m \rangle \leqslant 0,\ m \in M. \tag{3}$$

Потребности:
$$\mathbf{x}_k \in X_k,\ k \in K. \tag{4}$$

Технологические возможности:
$$\mathbf{a}_m \in Y_m,\ m \in M. \tag{5}$$

Максимум прибыли:
$$\max \pi_m,\ m \in M. \tag{6}$$

Оптимум предпочтений:
$$\mathbf{x}_k = \sup_{\succsim_k} X_k,\ k \in K. \tag{7}$$

Понятие функциональной матрицы модели (1)...(7) определено при следующих условиях:

1) выполняется какой-либо набор формальных требований к компонентам модели, гарантирующий существование в ней конкурентного равновесия $(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_m, \mathbf{p})$;

2) множества X_k и Y_m компактны в пространстве благ, а их границы в этом пространстве представимы конечным множеством дифференцируемых функций некоторого вектора параметров;

3) отношения предпочтения в окрестности $(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_m, \mathbf{p})$ представимы числовой функцией, дифференцируемой по компонентам соответствующих векторов $\mathbf{x}_k$.

В рамках этих предположений модель Эрроу-Дебре представляет собой задачу векторного программирования. Обозначим эту задачу символом E.

Функциональная матрица[1] $\mathrm{func}(E, (\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_m, \mathbf{p}))$ схематически представлена в табл. 1. Величины $q_{iki'k'}$ соответствуют производным функций, описывающих границы потребитель-

[1] Матрица частных производных эффективных ограничений и целевых функций по переменным.

ского множества, по переменным $x_{i'k'}$, $r_{imi'm'}$ — производным функций, описывающих границы технологического множества, по переменным $a_{i'm'}$, $u_{ki'k'}$ — нормам эквивалентной взаимозамены благ с точки зрения отношения предпочтения $\succsim_k$. Значения v_k, v_m, v_{ik}, v'_{ik} и v_{im} описывают произвольный градиент изменения правых частей ограничений модели, $\delta_{ii'}$ — символ Кронекера. Множители Лагранжа ограничений, соответствующих строкам табл. 1, обозначим символами $\lambda_{1i}...\lambda_{8k}$ соответственно.

Таблица 1

Схема функциональной матрицы модели E

Переменные / Ограничения	$x_{i'k'}$, $i' \in I$, $k' \in K$	$s_{i'k'}$, $i' \in I$, $k' \in K$	$a_{i'm'}$, $i' \in I$, $m' \in M$	$\pi_{m'}$, $m' \in M$	Градиент
(1)	$\delta_{ii'}$	$-\delta_{ii'}$	$-\delta_{ii'}$	0	0
(2)	$p_i \delta_{kk'}$	$-p_i \delta_{kk'}$	0	$-\alpha_{km'}$	0
(3)	0	0	$-p_i \delta_{mm'}$	$\delta_{mm'}$	0
(4)	$\delta_{ii'} \delta_{kk'} q_{iki'k'}$	0	0	0	v_{ik}
(5)	0	0	$\delta_{ii'} \delta_{mm'} r_{imi'm'}$	0	v_{im}
(6)	0	0	0	$-\delta_{mm'}$	v_m
(7)	$u_{ki'k'}$	0	0	0	v_k
$s_{ik} = \mathrm{const}$, $i \in I, k \in K$	0	$\delta_{ii'} \delta_{kk'}$	0	0	v'_{ik}
$x_{ik} \geqslant 0$, $i \in I, k \in K$	$\delta_{ii'} \delta_{kk'}$	0	0	0	0

По логике Вальраса, в условиях конкурентного равновесия каждый хозяйствующий субъект принимает решение, не учитывая состояние других субъектов. Значит, в *индивидуальной* задаче оптимизации предпочтений либо максимизации прибыли конкретного субъекта целевые функции других субъектов не должны быть эффективными. Это требует существования точек Куна-Таккера (ТКТ) задачи E, в которых множители Лагранжа по всем целевым функциям, кроме одной, равны нулю. Ведь, согласно теореме взаимности в математическом программировании [1], каждый вектор оценок в задаче максимизации прибыли или оптимизации предпочтений отдельного хозяйствующего субъекта пропорционален хотя бы одному вектору оценок модели E. Это условие выполнимо: приняв $\lambda_{6m} = \lambda_{7k} = 0$ для некоторых $m \in M$ и $k \in K$, имеем:

$$-p_i \lambda_{2k} = -\lambda_{1i} + r_{imi'm'} \lambda_{5im},\ i' = i,\ m' = m;$$

$$p_i \lambda_{2k} = -\lambda_{1i} + \lambda_{8ik}; \tag{8}$$

$$p_i \lambda_{2k} = -\lambda_{1i} - q_{iki'k'} \lambda_{4ik} - \lambda_{9ik},\ i' = i,\ k' = k.$$

Следовательно, среди альтернативных ТКТ, для которых λ_{6m} и λ_{7k} равны нулю, имеются такие, для которых при $i \in I$ нулю равны либо λ_{1i}, либо каждая из λ_{5im}, λ_{8ik} и (при условии $x_{ik} \neq 0$) λ_{4ik}. В ТКТ, для которых $\lambda_{1i} = 0$, любая из λ_{4ik} (при $x_{ik} \neq 0$), λ_{5im} и λ_{8ik} пропорциональна $p_{i'}$ при $i = i'$. В ТКТ, для которых $\lambda_{4ik} = \lambda_{5im} = \lambda_{8ik} = 0$, а $x_{ik} \neq 0$, имеет место пропорциональность между λ_{1i} и $p_{i'}$ при $i = i'$.

Вследствие эффективности бюджетных ограничений оценки балансов благ (1) в модели E не обязательно отражают стоимость благ. В самом деле, изменение свободных членов балансов благ не влияет ни на одно бюджетное ограничение и, как следствие, приводит к нарушению конкурентного равновесия. Стоимость благ в модели E выражается величинами λ_{8ik} в том базисном миноре $\mathrm{func}(E, (\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_m, \mathbf{p}))$, в котором $\lambda_{1i} = 0$, поскольку изменение свободного члена этого ограничения переводит E в новое конкурентное равновесие[2]. Из (8) следует, что она пропорциональна p_i, то есть *значения стоимости благ в состоянии конкурентного равновесия модели Эрроу-Дебре пропорциональны ценам конкурентного равновесия*.

Определим балансовую систему

$$(\mathrm{func}(E, (\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_m, \mathbf{p})), (x_{i'k'} \,|\, s_{i'k'} \,|\, a_{i'm'} \,|\, \pi_{m'} \,|\, 1), \boldsymbol{\lambda}), \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ — вектор множителей Лагранжа модели E. Выберем в $\mathrm{func}(E, (\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_m, \mathbf{p}))$ некоторый базисный минор, в котором $\lambda_{1i} = \lambda_{6m} = \lambda_{7k} = 0$. Выберем в $\mathrm{func}(E, (\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_m, \mathbf{p}))$ базисный минор. Пусть I^b и J^b — множества строк и столбцов выбранного базиса. Построим квадратную матрицу $\mathbf{A}$, дополнив выбранный базис строкой и столбцом — линейными комбинациями базисных строк (столбцов) с коэффициентами, равными значениям соответствующих двойственных (прямых) переменных балансовой системы (9). Коэффициенты столбцов матрицы $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$, где $\mathbf{V} \to \mathbf{A}$, соответствующих условию $s_{ik} = \mathrm{const}$, означают обусловленный единичным приростом s_{ik} прирост:

[2] Несложно проверить наличие у λ_{8ik} всех признаков стоимости, указанных в [3].

- в строках, соответствующих $x_{i'k'}$ — интенсивности потребления блага i' субъектом k';
- в строках, соответствующих $s_{i'k'}$ — запаса блага i' у субъекта k' (эти коэффициенты нулевые, поскольку $s_{i'k'}$ — константы);
- в строках, соответствующих $a_{i'm'}$ — выпуска блага i' предприятием m';
- в строках, соответствующих $\pi_{m'}$ — прибыли предприятия m'.

Коэффициенты столбцов матрицы $\mathbf{W}$, соответствующих остальным ограничениям, описывают те же изменения переменных, обусловленные единичным изменением свободного члена данного ограничения при прочих равных условиях.

Приведённая интерпретация верна только в окрестности оптимума по Парето, которому соответствует $\mathrm{func}(E, (\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_m, \mathbf{p}))$, при условии, что в этой окрестности остаются в силе сделанные выше предположения 1...3. Она не распространяется на строки и столбцы матрицы $\mathbf{A}$, линейно независимые от других строк (столбцов), если таковые имеются.

Вывод. При выполнении вышеуказанных условий значения стоимости благ в состоянии конкурентного равновесия модели E, а значит, и цены конкурентного равновесия, пропорциональны приросту:

- выпуска любого блага любым предприятием;
- интенсивности потребления любого блага любым потребителем;
- прибыли любого предприятия

вследствие единичного прироста запаса данного блага у любого субъекта при $\mathbf{V} \to \mathbf{A}$ и выполнении условий корректности интерпретации.

Замечание 1. В традиционной интерпретации модели Эрроу-Дебре цены конкурентного равновесия зависят от предпочтений. Но если, следуя [3], принять, что отношение $\succsim_k$ отражает локальные в данном оптимуме по Парето предпочтения, образовавшиеся вследствие экономической деятельности хозяйствующих субъектов, то равновесные цены обусловлены составом технологического и потребительского множеств.

Замечание 2. В модели Вальраса и во всех её конкретизациях предполагается, что собственники не могут установить разные цены на одно и то же благо. Установленные здесь свойства цен конкурентного равновесия имеют место и в отсутствие этого предположения:

пользуясь теоремой взаимности в математическом программировании, для модели E несложно доказать, что в состоянии конкурентного равновесия значения стоимости благ необходимо пропорциональны для всех хозяйствующих субъектов.

Библиографический список

1. Лурье А.Л. Абстрактная модель оптимизации народнохозяйственного процесса и объективно обусловленные оценки // Экономика и математические методы. — Т. 2, 1966, вып. 1. — С. 12-30.
2. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.
3. Светлов Н.М. На пути к новой концепции стоимости. М.: Изд-во МСХА, 2002.
4. Walras L. Elements of Pure Economies. L., 1954.