

ОБОСНОВАНИЕ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИСХОДОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ  
МОДЕЛЯХ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

Светлов Н.М.

Экономико-математические модели (ЭММ) являются важным инструментом совершенствования планирования и управления агропромышленным комплексом. Основное направление более полного раскрытия возможностей ЭММ - дальнейшее повышение степени их адекватности реальным хозяйственным процессам.

Сельскохозяйственное производство характеризуется значительной степенью неопределенности результатов. Это обусловлено рядом причин, главные из которых - незащищенность его от погодных и других стихийных факторов и биологическая природа предметов труда. Поэтому для моделирования производственных процессов в сельском хозяйстве все более широкое применение находят стохастические ЭММ [1]. Цель данной статьи - рассмотреть методы обоснования весовых коэффициентов исходов реализации случайных условий, применяемые при разработке линейных стохастических ЭММ, предложить альтернативный способ и проанализировать результаты его апробации при разработке системы ЭММ для АО "Константиново" Домодедовского района Московской области.

Как известно [2], функционал линейной стохастической двухэтапной модели, решаемой по критерию математического ожидания некоторого эффекта, выглядит так:

$$\sum_{f=1}^F w_f E_f,$$

где  $F$  - число исходов реализации случайных параметров модели,  $f$  - номер исхода,  $w_f$  - вероятность исхода  $f$ ,  $E_f$  - величина эффекта при условии реализации  $f$ -го исхода.

В работах, посвященных линейным стохастическим ЭММ (например, [2,3]) вероятности исходов предполагаются известными достоверно. Это предположение оправдано для моделей таких предметных областей, применительно к которым имеются результаты очень большого количества наблюдений. Сельскохозяйственное производство не входит в их число: например, невозможно увеличить количество наблюдений исходов погодных условий, влияющих на урожайность культур, содержание в них питательных веществ и т.п.

Число наблюдений в рядах динамики, используемых для обоснования вероятностей исходов реализации случайных факторов в фактически разрабатываемых моделях [4], редко превышает 30. В связи с этим возникает ситуация, когда под воздействием случайных причин число реализаций каждого исхода не соответствует истинной (объективной) его вероятности.

Подобная ситуация возникла и при разработке системы моделей для АО "Константиново": в 1991 г., когда проводились работы, имелись данные всего за 11 лет.

Поставим следующую задачу: оценить степень достоверности определения вероятности реализации некоторого исхода  $A$  из числа двух возможных исходов при известных общем числе наблюдений и числе наблюдений интересующего нас исхода. Предположим, что этот исход реализовался  $n$  раз из общего числа наблюдений  $N$ . Этот результат наблюдений (обозначим его  $U$ ) мог возникнуть под влиянием различной объективной вероятности  $p_A$  данного исхода: результат наблюдений мог

быть таким (с определенной вероятностью) как в случае, если  $p_A$  равно точно  $n/N$ , так и в случае, если она принимает иное значение.

До наблюдения любое мнение о вероятности интересующего нас исхода равносильно (нет никаких оснований утверждать, что эта вероятность скорее равна 90%, нежели 10%). Поэтому утверждение о том, что объективная вероятность данного исхода составляет  $p_A$ , может оказаться истинным с бесконечно малой вероятностью  $\rho(p_A) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1/k$ . С другой стороны, вероятность  $\rho(U/p_A)$  полученного результата наблюдений  $U$  при условии, что объективная вероятность  $p_A$  известна, составляет  $p_A^n \cdot (1-p_A)^{N-n}$ . Подставив эти значения в формулу Байеса [5], легко показать, что вероятность  $\rho(p_A/U)$  распределена с плотностью, подчиняющейся биномиальному закону. Вероятность того, что объективная вероятность исхода  $A$  окажется заключена в интервале  $[\alpha; \beta]$ , составляет

$$r(p_A \in [a; b] / U) = \frac{(N+1)!}{n! (N-n)!} \int_a^b p_A^n \cdot (1-p_A)^{N-n} dp_A.$$

Аналогичный подход позволяет показать, что для случая с 3 исходами верна формула

$$r(p_A \in [a; b] / U) = \frac{(N+2)!}{m! n! (N-m-n)!} \int_a^b \left( \int_0^{1-p_A} p_A^n \cdot p_B^m \cdot (1-p_A)^{N-m-n} dp_B \right) dp_A,$$

где  $A$  - интересующий нас исход;  $B$  - один (любой) из двух других исходов;  $n$  и  $m$  - число наблюдений исходов  $A$  и  $B$  соответственно;  $p_A$  и  $p_B$  - вероятности соответствующих исходов;  $N$  - общее число наблюдений.

Чем больше значение этого показателя для достаточно узкого интервала вероятностей, тем больше оснований предполагать, что подобное значение  $p_A$  действительно окажется в заданном интервале.

В табл. 1 приведены результаты вычислений вероятностей возникновения ошибки определения вероятности исхода, превышающей определенную величину, проделанных при разработке ядра системы моделей -

1. Вероятности превышения допустимой ошибки определения вероятности исхода для различных вариантов модели обоснования производственной структуры АО "Константиново"

Варианты модели	Величина допустимой ошибки			
	±5%	±10%	±20%	±50%
<b>На основе 11-летнего ряда</b>				
2 группы:				
исход с 5 наблюдениями	0.8717	0.7463	0.5150	0.0878
исход с 6 наблюдениями	0.8463	0.6976	0.4329	0.0353
3 группы:				
исход с 3 наблюдениями	0.9101	0.8211	0.6495	0.2419
исход с 4 наблюдениями	0.8939	0.7822	0.5779	0.1450
<b>На основе 22-летнего ряда</b>				
2 группы:				
исход с 11 наблюдениями	0.8083	0.6269	0.3273	0.0093
3 группы:				
исход с 7 наблюдениями	0.8657	0.7349	0.4958	0.0789
исход с 8 наблюдениями	0.8521	0.7087	0.4520	0.0502

модели обоснования производственной структуры АО "Константиново" на перспективу. Расчеты проводились как для 11-летнего ряда урожайностей зерновых в АО "Константиново", так и для 22-летнего ряда по району в целом.

Как видно из табл. 1, вероятности исходов оказались определены настолько ненадежно, что говорить об их использовании в качестве весовых коэффициентов исходов в моделях не приходится. Применение вдвое более длинного ряда динамики практически не улучшило обоснованность вероятностей исходов. Даже 150-летний ряд при двух исходах с равным числом наблюдений не может обеспечить вероятность 10%-й ошибки меньшую, чем 0.217.

В подобной ситуации можно либо отказаться от разработки стохастических моделей, либо попытаться в максимально возможной степени

использовать имеющуюся информацию для обоснования весовых коэффициентов исходов.

Итак, вероятность исхода остается практически неизвестной. Известно лишь то, что после реализации события U она распределена по определенному закону. Это распределение можно учесть, построив следующий функционал для стохастической модели:

$$\sum_{f=1}^F \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{i+0.5}{k} r \left( p_f \in \left[ \frac{i}{k}; \frac{i+1}{k} \right] / U \right) \right\} E_f.$$

Такой функционал учитывает все вероятности  $p_f$  исхода  $f$  с шагом  $1/k$ .

Можно доказать, что при  $k \rightarrow \infty$  этот функционал становится равен

$$\sum_{f=1}^F \frac{n_f+1}{N+F} E_f.$$

При этом он по-прежнему отражает математическое ожидание эффекта, но уже не при заданных вероятностях исходов, а в ситуации, когда на основе U мы можем судить только о распределении этих вероятностей. Весовой коэффициент  $(n_f+1)/(N+F)$ , в отличие от ранее использовавшейся наиболее правдоподобной оценки вероятности исхода  $w_f$ , учитывает не только возможность того, что вероятность исхода близка к  $w_f$ , (что, как было показано, маловероятно), но и возможность того, что вероятность исхода окажется любой величиной.

Описанный способ позволяет в принципе строить стохастические модели на основе коротких рядов динамики, но три соображения требуют отдавать предпочтение, если есть возможность, более длинным. Во-первых, чем длиннее ряд, тем меньше вероятность существенных расхождений между математическим ожиданием эффекта и его значением, реализующимся на практике. Во-вторых, с увеличением длины ряда быстро снижаются ошибки определения средней урожайности на перспективу. В-третьих, открывается возможность увеличения числа исходов.

2. Некоторые показатели хозяйственной деятельности АО "Константиново" фактически и по решению (в ценах соответствующих периодов)

Источники данных	Прибыль от реализации, млн.р.	Рентабельность, %	Удельный вес продукции животноводства в товарной продукции, %	Удельный вес племенной продукции животноводства, %
Модель 1991 г. (2 исхода)	3.664	36.6	90.2	41.1
контроль <sup>*)</sup>	3.662	36.6	90.2	41.1
Модель 1991 г. (3 исхода)	3.892	36.8	91.0	39.4
контроль	3.696	36.8	89.4	36.5
Модель 1993 г. (3 исхода)	264.2	18.3	77.6	9.1
контроль	253.7	17.7	74.2	14.6
Фактическое значение: 1991 г.	4.475	36.5	86.7	33.4
1992 г.	8.316	9.4	82.2	12.2
1993 г. (оценка)	112.3	12.0	72.3	13.9

Разработанный прием позволил использовать стохастические ЭММ для АО "Константиново". В 1991 г. модель производственной структуры решалась по 11-летнему ряду, в 1992 г. для уточняющей модели кормопроизводства использовалась 12-летняя динамика, в 1993 г. в связи с серьезными изменениями в экономической среде заново решалась модель обоснования производственной структуры на перспективу на основе ряда, включавшего 13 наблюдений. В 1991 г. решались варианты ЭММ с 2 и 3 исходами реализации случайных факторов, в остальных случаях выделялось по 3 исхода. В табл. 2 приведены некоторые результаты решения вариантов моделей обоснования производственной структуры по сравнению с фактическими данными.

<sup>\*)</sup> Вариант модели, решенный по традиционной технологии.

В модели 1991 г., включавшей 2 исхода, при решении по новому способу замены базиса не произошло, благодаря изменению весовых коэффициентов изменились лишь математические ожидания материально-денежных затрат, выручки и прибыли от реализации сельскохозяйственной продукции. В остальных случаях изменения весовых коэффициентов оказались столь существенны, что повлияли на оптимальную производственную структуру, вызвав замену базиса задачи линейного программирования. Например, при решении варианта модели 1993 г. только 2.6% разницы значений прибыли в основном и контрольном вариантах возникает вследствие изменения весовых коэффициентов, а 97.4% - вследствие изменений в производственной структуре.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кравченко Р.Г. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. М.:Колос, 1978.
2. Данциг Д. Линейное программирование, его обобщения и применения. М.: Прогресс, 1966.
3. Кардаш В.А. Экономическая оптимизация в орошении // Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве. Ч. II. Новосибирск: Наука, 1972.
4. Копенкин Ю.И. Стохастические модели оптимального планирования сельскохозяйственного производства: Лекция для слушателей ФПК. М.: 1981.
5. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для эк. специальностей вузов / В.А.Колемаев, О.В.Староверов, В.Б.Турундаевский; под ред. В.А.Колемаева. М.: Высшая школа, 1991.

#### АННОТАЦИЯ

В статье Светлова Н.М. "Обоснование весовых коэффициентов исходов в стохастических моделях сельскохозяйственного производства" рассматриваются новые приемы расчета весовых коэффициентов исходов реализации случайных условий функционирования сельскохозяйственного производства, позволяющие давать количественную оценку степени их достоверности. Рекомендованы способы повышения достоверности весовых коэффициентов в условиях недостаточной информации. Обобщен опыт применения упомянутых приемов при обосновании рациональной производственной структуры АО "Константиново" Домодедовского района Московской области.