Министерство сельского хозяйства и продовольствия
Российской Федерации
Московская сельскохозяйственная академия им. К.А. Тимирязева

УДК 338.5:63.001.573

Светлов Н.М.

СВОЙСТВА МАТЕРИАЛЬНЫХ БАЛАНСОВ В ДЕЗАГРЕГИРОВАННЫХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Москва 1997

Любая экономическая система, рассматриваемая со стороны происходящих в ней процессов создания и потребления благ, может быть представлена в виде системы балансов. Количество произведённого, изъятого из запасов и поступившего из других источников блага всегда равно количеству этого же блага, израсходованного на потребление, капитальные вложения и другие цели, а также утраченного.

Всем экономическим системам присущи балансовые закономерности. Это их свойство является объективным и существенным. Оно имеет непосредственное отношение к проблемам формирования пропорций производства и цен.

В настоящей статье излагаются результаты экономической интерпретации свойств формальных балансовых систем. Показано, что эти свойства присущи ряду дезагрегированных моделей экономических систем, а именно балансовой модели В. Леонтьева, основной задаче производственного планирования Л.В. Канторовича в статической и динамической постановках, модели расширяющейся экономики Дж. фон Неймана, модели общего рыночного равновесия К. Эрроу и Ж. Дебре. Свойства, присущие формальным балансовым системам, применительно к перечисленным моделям (кроме модели Л.В. Канторовича, см. [6]) обнаружены впервые.

1. Формальная балансовая система

Формальной балансовой системой называется система следующего вида:

$$\Xi = \begin{cases} \mathbf{G}=(g_{ij}); \\ \mathbf{l}=(l_j); \\ \mathbf{p}=(p_i); \\ \mathbf{A}=(a_{ij}),\ a_{ij}=g_{ij}/l_j; \\ \forall j \sum\limits_j g_{ij}=0; \\ \forall i \sum\limits_i a_{ij}\, p_i=0; \\ i\in I,\ j\in J. \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ — некоторый базисный минор $\mathbf{A}$, $\bar{\bar{I}}$ и $\bar{\bar{J}}$ — множества соответственно строк и столбцов, вошедших в $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$. Из пятой и шестой строк системы (1) следует, что размерность $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ меньше наименьшей из размерностей $\mathbf{A}$. Рассмотрим квадратную матрицу $\bar{\mathbf{A}}$ размерность которой равна $\#\bar{\bar{I}}+1\times\#\bar{\bar{J}}+1$ (знак # обозначает операцию определения мощности множества), элементы $\bar{a}_{ij}$ которой образованы по правилу

$$\bar{a}_{ij}=a_{ij},\ i\in\bar{\bar{I}},\ j\in\bar{\bar{J}}; \qquad (2)$$

$$\bar{a}_{ij} = \sum_k a_{ik},\ j\notin\bar{\bar{J}},\ k\in J\backslash\bar{\bar{J}}; \qquad (3)$$

$$\bar{a}_{ij} = \sum_k a_{kj},\ i\notin\bar{\bar{I}},\ k\in I\backslash\bar{\bar{I}}. \qquad (4)$$

Этой матрице присущи следующие свойства:

— она является вырожденной квадратной матрицей;

— $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ является её базисным минором, следовательно, ранги $\mathbf{A}$ и $\bar{\mathbf{A}}$ одинаковы и равны $\#\bar{\bar{I}}$ и $\#\bar{\bar{J}}$;

— из строк 5 и 6 системы (1) следует, что элемент на пересечении строки $i\notin\bar{\bar{I}}$ и столбца $j\notin\bar{\bar{J}}$ может быть определён по любой из формул (3) и (4);

— двойственность:

$$\begin{cases} \forall i\ \forall j\ \dfrac{\sum\limits_m a_{im}\, l_m}{l_j} = \dfrac{\sum\limits_n a_{nj}\, p_n}{p_i} = -a_{ij}\ ; \\ i\in I,\ j\in J,\ n\in I,\ m\in J,\ n\neq i,\ m\neq j \end{cases} \qquad (5)$$

— для $\bar{\mathbf{A}}$ верны теоремы, приведённые ниже (доказательства приведены в [6]).

Т е о р е м а 1 (о вырожденной матрице). Пусть $\mathbf{V}$ — произвольная невырожденная матрица размерностью $n\times n$, w_{ij} — коэффициент i–й строки и j–го столбца матрицы $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$, матрица $\bar{\mathbf{A}}$ размерностью $n\times n$ вырождена и имеет ранг n-1, вектор $\mathbf{x}^*$ — любое нетривиальное решение системы уравнений $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, x_i — коэффициент i-й строки вектора $\mathbf{x}$. Тогда $\lim\limits_{\mathbf{V}\to\bar{\mathbf{A}}} w_{gj}/w_{hj} = x_g/x_h$ для любого j, для которого существует базисный минор матрицы $\bar{\mathbf{A}}$, не содержащий строки j.

О п р е д е л е н и е . *Строго базисным столбцом* называется столбец, который содержат все базисные миноры данной матрицы.

Т е о р е м а 2 (о строго базисном столбце). Если в матрице $\bar{\mathbf{A}}$ имеется i-й строго базисный столбец, то в решении уравнения $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ x_i тождественно равно нулю. Если x_i тождественно равно нулю, то i-й столбец является строго базисным.

2. Модели межотраслевого баланса и формальные балансовые системы

Модель межотраслевого баланса описывает экономическую систему, в которой каждая отрасль выпускает единственный продукт. В классическом виде она записывается следующим образом:

$$
\begin{cases}
\forall i\ l_i - \sum\limits_j a_{ij}\, l_j = b_i; \\
\forall i\ \forall j\ l_j \ge 0,\ a_{ij} \ge 0,\ b_i \ge 0; \\
i \in J',\ j \in J'.
\end{cases}
\tag{6}
$$

Ниже приведена математическая запись динамического варианта модели межотраслевого баланса.

$$
\begin{cases}
\forall i\ l_i - \sum\limits_j a_{ij}\, l_j - \sum\limits_j d_{ij}\, r_j = b_i; \\
\forall i\ \forall j\ l_j \ge 0,\ a_{ij} \ge 0,\ b_i \ge 0; \\
i \in J',\ j \in J'.
\end{cases}
\tag{7}
$$

В системах уравнений (6) и (7) J' означает множество отраслей и, соответственно, продуктов; i — индекс продукта; j — индекс отрасли; l_i (l_j) — выпуск i-го (j-го) продукта в единицу времени; a_{ij} — затраты продукта i в расчёте на единицу выпуска продукта j; b_i — чистый выпуск i-го продукта (включающий конечное потребление, сальдо внешнеторгового баланса, а в системе (6), кроме того, инвестиции); r_j — прирост выпуска j-го продукта в единицу времени; d_{ij} — норма капитализации продукта i в расчёте на единицу интенсивности выпуска продукта j.

В рамках экономической интерпретации модели (7) верны также следующие соотношения (никоим образом не следующие из формальной модели, а только из её экономического смысла):

$$
\begin{cases}
\forall j \sum\limits_i \delta_{ij} - a_{ij}\, p_i - \dfrac{r_j}{l_j} d_{ij}\, p_i = v_j; \\
\sum\limits_j v_j\, l_j = V; \\
\sum\limits_i b_i\, p_i = V; \\
\forall i\ \ p_i \ge 0
\end{cases}
\tag{8}
$$

(δ_{ij} - символ Кронекера). Применительно к модели (6) они также верны с тем отличием, что в первом уравнении будет отсутствовать член $\frac{r_j}{l_j} d_{ij}\, p_i$.

На основе соотношений (7) и (8) могут быть построены матрицы

$$
\left(\begin{array}{c|c}
\dfrac{\delta_{ij} - a_{ij}}{\sum\limits_i (\delta_{ij} - a_{ij}) p_i} & \dfrac{-b_i + \sum\limits_j d_{ij} r_j}{\sum\limits_i \left(-b_i + \sum\limits_j d_{ij} r_j\right)}
\end{array}\right)
\tag{9}
$$

и

$$
\left(\begin{array}{c|c}
\dfrac{d_{ij}}{\sum\limits_i -d_{ij} p_i} & \dfrac{-b_i + \sum\limits_j (\delta_{ij} - a_{ij}) l_j}{\sum\limits_i \left(-b_i + \sum\limits_j (\delta_{ij} - a_{ij}) l_j\right)}
\end{array}\right),
\tag{10}
$$

обладающие всеми свойствами матрицы $\bar{\mathbf{A}}$ формальной балансовой системы, причём их столбцы представляют собой линейные комбинации с коэффициентами ($l_j|1$) и ($r_j|1$) соответственно, а строки — с коэффициентами ($p_i|1$).

Аналогичным образом можно получить для статической модели матрицу $\bar{\mathbf{A}}$ следующего вида:

$$
\left(\begin{array}{c|c}
\dfrac{\delta_{ij} - a_{ij}}{v_j} & \dfrac{-b_i}{-V}
\end{array}\right).
\tag{11}
$$

Её столбцы представляют собой линейную комбинацию с коэффициентами ($l_j|1$), строки — с коэффициентами ($p_i|1$).

Применительно к матрице (11) теоремы 1 и 2 приобретают экономическую интерпретацию. Для этого представим вектор **b** в виде суммы двух векторов: объективно обусловленного потребления $\mathbf{b}'$ и избытка $k\mathbf{i}_h$, где $\mathbf{i}_h$ — вектор, в котором h-й элемент равен единице, остальные — нулю. Предположим для простоты, что избыток имеется только по одному продукту[1]. Тогда при $k \to 0$

$$\mathbf{V} = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\delta_{ij} - a_{ij}}{v_j} & \dfrac{-b'_i}{-V} \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\delta_{ij} - a_{ij}}{v_j} & \dfrac{-b_i}{-V} \end{array} \right).$$

С экономической точки зрения это означает, что внутри экономической системы найден способ целесообразного использования почти всего избытка.

В этом случае коэффициенты матрицы **W** имеют следующий экономический смысл.

Величина, обратная правому нижнему коэффициенту, есть величина изменения совокупной добавленной стоимости вследствие увеличения объективно обусловленного потребления на единицу при приближении к полной сбалансированности экономической системы. Эта величина стремится к нулю.

Величины, обратные остальным коэффициентам последней строки, есть изменения количества продуктов вследствие роста объективно обусловленного потребления на единицу при приближении к полной сбалансированности экономической системы. Они также стремятся к нулю.

---

[1] К аналогичным выводам можно прийти, положив, что отсутствие способа целесообразного использования избытка $k\mathbf{i}_h$ приводит к его обесцениению, вследствие чего $V \to \sum_i b'_i p_i$.

Коэффициенты правого столбца (кроме нижнего) есть дополнительные интенсивности производства продуктов, необходимые для производства дополнительной единицы совокупной добавленной стоимости при приближении к полной сбалансированности экономической системы.

Остальные коэффициенты представляют собой дополнительные интенсивности производства продуктов, индексы которых равны номерам строк, необходимые для выпуска дополнительных единиц продуктов, индексы которых равны номерам столбцов, при приближении к полной сбалансированности экономической системы. Они также могут быть рассмотрены как приросты цен продуктов с индексами, соответствующими номерам столбцов, доставляющие единичные дополнительные прибыли технологическим процессам производства продуктов с индексами, соответствующими номерам строк.

Из теоремы 1 следует, что любая строка матрицы **W** стремится к вектору $(p_i|1)/k$, любой столбец — к вектору $(l_j|1)/k$ (строго базисных столбцов в матрицах межотраслевого баланса быть не может). Таким образом, оказывается, что при почти полной сбалансированности экономической системы цены почти пропорциональны величинам полных затрат любого продукта на производство единицы данного продукта. Следовательно:

— цены продуктов почти обратно пропорциональны их чистым выпускам при заданной интенсивности технологического процесса производства некоторого (любого) продукта и нулевых чистых выпусках остальных продуктов;

— стоимости чистых выпусков при заданной интенсивности технологического процесса производства некоторого (любого) продукта и нулевых чистых выпусках остальных продуктов почти равны для всех продуктов.

При $k = 0$ коэффициенты **W** становятся бесконечно большими, однако их соотношения конечны и сохраняют экономический смысл. Соотношения любых двух коэффициентов (кроме последнего) одной строки равны соотношению цен соответствующих продуктов и означают пропорцию, в которой данная экономическая система допускает взаимозамену выпуска двух данных продуктов: каким количеством одного из них приходится пожертвовать (заплатить) ради дополнительного выпуска другого при условии неизменности совокупной добавленной стоимости V. При нарушении этой пропорции не существует значений l_j, которые могли бы обеспечить сбалансированность остальных продуктов и добавленной стоимости, т.е. система в рамках заданных предпосылок оказывается неработоспособной.

Аналогичный анализ по отношению к матрице (9) позволяет получить точно такие же утверждения относительно свойств коэффициентов соответствующей ей матрицы **W**.

Применительно к матрице (10) верно следующее.

Величина, обратная правому нижнему коэффициенту, есть величина изменения совокупных капитальных вложений за счёт снижения на единицу производственного и конечного потребления при приближении к полной сбалансированности экономической системы. Эта величина стремится к нулю.

Величины, обратные остальным коэффициентам последней строки, означают количества продуктов, которые могут быть использованы в качестве капитальных вложений за счёт снижения производственного и конечного потребления на единицу при приближении к полной сбалансированности экономической системы. Они также стремятся к нулю.

Коэффициенты правого столбца (кроме нижнего) представляют собой интенсивности затрат продуктов на капитальные вложения, необхо-

димые для увеличения совокупной стоимости капитальных вложений на единицу при приближении к полной сбалансированности экономической системы.

Остальные коэффициенты представляют собой:

— капитальные затраты продукта, индекс которого равен номеру строки, необходимые для единичного прироста интенсивности производства продукта, индекс которого равен номеру столбца;

— прирост цены продукта с индексом, соответствующим номеру столбца, уменьшающий на единицу затраты на капитальные вложения, обеспечивающие единичный рост интенсивности технологического процесса производства продукта с индексом, соответствующим номеру строки.

Любая строка матрицы **W** опять-таки стремится к вектору $(p_i|1)/k$, столбец — к вектору $(r_j|1)/k$, т.е. при почти полной сбалансированности экономической системы цены почти пропорциональны величинам капитальных затрат любого продукта на единичный прирост интенсивности производства данного продукта.

Интерпретация соотношений двух коэффициентов одной строки матрицы **W** при $k = 0$ остаётся прежней, только условие неизменности величины совокупной добавленной стоимости заменяется на условие неизменности величины совокупных капитальных вложений.

Рассмотрение модели межотраслевого баланса как формальной балансовой системы позволило расширить экономическую интерпретацию цен межотраслевого баланса и обнаружить их связь с технико-экономическими параметрами моделируемой системы. С другой стороны, цены существенным образом зависят от величин добавленных стоимостей, которые в рамках данной модели являются экзогенными величинами. Поэтому сами технико-экономические параметры моделируемой системы при условии её почти полной сбалансированности подвержены зависимости от величин добавленной стоимости.

3. Модель линейного программирования как формальная балансовая система

Модели линейного программирования — это оптимизационные модели, сводимые к задаче линейного программирования (12).

$$\begin{cases} \forall i \sum_j a_{ij} l_j \le b_i; \\ \forall j\ l_j \ge 0; \\ \max \sum_j c_j l_j; \\ i \in I',\ j \in J'. \end{cases} \tag{12}$$

Оптимальному решению такой задачи ставится в соответствие матрица $\bar{\mathbf{A}}$ вида

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{ij} & b_i \\ \hline c_j & Z \end{array} \right),$$

где Z — оптимальное значение целевой функции, $i \in I^*$, $j \in J^*$ (I^* — множество строк, J^* — столбцов оптимального базиса). Столбцы этой матрицы представляют собой линейную комбинацию с коэффициентами $(l_j|1)$, строки — с коэффициентами $(p_i|1)$.

Вследствие связи общей задачи линейного программирования с $\bar{\mathbf{A}}$ свойства последней присущи всем задачам этого класса, а их интерпретация зависит от смысла ограничений и переменных. В качестве примера рассмотрим две модели: основную задачу производственного планирования Л.В. Канторовича (13) и оптимизационную динамическую модель с линейной целевой функцией (14) этого же автора. Эти модели обладают той важной особенностью, что не располагают стоимостным функционалом,

наличие которого могло бы трактоваться как явная причина субъективного характера оптимальных цен.

$$\begin{cases} \forall i \sum_j a_{ij} l_j - a_i l \ge b_i; \\ \forall k \sum_j a_{kj} l_j \le b_k; \\ \forall j\ l_j \ge 0; \\ l \ge 0; \\ \max l; \\ i \in I',\ k \in I'',\ j \in J'. \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \forall t\ \forall i \sum_j a_{ijt} l_j - a_{it} l_t \ge b_{it}; \\ \forall t\ \forall k \sum_j a_{kjt} l_j \le b_{kt}; \\ \forall j\ l_j \ge 0,\ \forall t\ l_t \ge 0; \\ \max \sum_j a_t l_t; \\ i \in I',\ k \in I'',\ j \in J',\ t \in T. \end{cases} \tag{14}$$

В моделях (13) и (14) I' — множество продуктов и воспроизводимых ресурсов; I'' — множество невоспроизводимых ресурсов; J' — множество производственных процессов; i — индекс продукта (воспроизводимого ресурса); k — индекс невоспроизводимого ресурса; j — индекс производственного процесса; l_j — интенсивность процесса j; l — интенсивность выпуска целевого набора продуктов; a_{ij}, a_{kj} — затраты ресурса i (k) на единицу интенсивности процесса j; a_i — количество продукта i в расчёте на единицу целевого набора продуктов; b_i — минимально необходимый выпуск продукта i; b_k — имеющийся запас невоспроизводимого ресурса k; T — множество периодов времени; t — индекс периода времени; l_t — интенсивность выпуска целевого набора продуктов в периоде t; a_{ijt}, a_{kjt} — затраты ресурса i (k) на единицу интенсивности процесса j в периоде t; a_{it} — количество продукта i в расчёте на единицу целевого набора продуктов в периоде t; b_{it} — минимально необходимый выпуск продукта i в периоде t; b_{kt} —

имеющийся запас невоспроизводимого ресурса k в периоде t; a_t — дисконтирующий множитель для периода t.

Модель (13) является частным случаем модели (14) при $\#T = 1$, поэтому интерпретируем матрицу **W** только для второй из них. Для этого построим матрицу **V**, используя тот же приём, что и для модели межотраслевого баланса.

Заметим, что все строки матрицы **V** описывают ресурсы (целевую функцию можно трактовать как один из ресурсов), а столбцы, кроме последнего, — технологические процессы (переменные l_t могут рассматриваться как альтернативные способы производства целевого ресурса). Поэтому все коэффициенты матрицы **W** (кроме последней строки), не расположенные в строго базисных строках (столбцах), характеризуют дополнительные интенсивности технологических процессов, необходимые для производства дополнительной единицы ресурса, индекс которого равен номеру столбца, при приближении к полной сбалансированности экономической системы. Они также могут быть рассмотрены как приросты оптимальных цен ресурсов, индексы которых соответствуют номерам столбцов, доставляющие единичную дополнительную прибыль[1] технологическим процессам с индексами, соответствующими номерам строк.

Коэффициенты последней строки матрицы **W** для моделей (13) и (14) не допускают технологической интерпретации, поскольку в общем случае отсутствует сколько-нибудь правдоподобная интерпретация пропорционального изменения вектора свободных членов модели. Однако они могут рассматриваться как приросты оптимальных цен ресурсов, индексы кото-

[1] В качестве денежной единицы в этом случае выступает стоимость единицы целевого ресурса.

рых соответствуют номерам столбцов, доставляющие единичный прирост целевому ресурсу (т.е. значению целевой функции).

Любая строка матрицы **W**, не являющаяся строго базисной (т.е. соответствующая процессу с ненулевой интенсивностью[1]), за исключением элементов, соответствующих строго базисным столбцам, стремится к вектору $(p_i|1)/k$, столбец, не являющийся строго базисным (т.е. соответствующий ограниченному благу), за исключением элементов, соответствующих строго базисным строкам, — к вектору $(l_j|1)/k$. Следовательно, при почти полной сбалансированности экономической системы оптимальные цены ограниченных ресурсов:

— почти пропорциональны величинам дополнительной интенсивности любого используемого процесса на производство дополнительной единицы данного ограниченного ресурса;

— почти обратно пропорциональны их чистым выпускам при заданной интенсивности некоторого используемого технологического процесса и нулевых чистых выпусках остальных ресурсов.

Следовательно, стоимости чистых выпусков при заданной интенсивности некоторого используемого технологического процесса и нулевых чистых выпусках остальных ресурсов почти равны для всех ограниченных ресурсов.

Соотношения любых двух коэффициентов, соответствующих ограниченным ресурсам, расположенных в одной строке, соответствующей используемой технологии, равны соотношению цен соответствующих ресурсов и означают пропорцию, в которой одним из них приходится уплатить за дополнительный выпуск другого при условии неизменности выпуска целевого блага. При нарушении этой пропорции и сохранении сбалансиро-

[1] Такие процессы будут далее именоваться *используемыми*.

ванности по остальным ресурсам экономическая система оказывается неработоспособной.

Представление моделей Канторовича в форме балансовых систем позволило установить связь оптимальных цен с технико-экономическими параметрами моделируемой системы. Цены вполне определяются, во-первых, параметрами технологических процессов, во-вторых, целевыми наборами ресурсов.

Трактовка целевых наборов ресурсов как объективно обусловленных потребностей затруднена тем обстоятельством, что все технологические процессы обладают способностью функционировать с любой интенсивностью в пределах области допустимых решений независимо от размера производства целевых наборов продуктов[1]. Эти наборы носят экзогенный характер по отношению к модели. Следовательно, возможности исследования цен посредством моделей Канторовича ограничены необходимостью опираться на экзогенно заданную целевую функцию. Использование натуральной целевой функции вместо стоимостной решает проблему масштаба цен и экономической сущности меры стоимости, но не даёт оснований говорить о безусловно объективном характере оптимальных цен.

[1] Отметим, что сам Л.В. Канторович считал, что оптимальные цены носят полностью объективный характер. Эта позиция подвергалась критике со стороны В.С. Немчинова [3].

4. Неймановская модель расширяющейся экономики как формальная балансовая система

Соотношение

$$\begin{cases} \forall i \ \sum_j a'_{ij} l_{jt} \ge r \sum_j a''_{ij} l_{jt+1}; \\ \sum_j a'_{ij} > 0; \\ \sum_i a''_{ij} > 0; \\ \forall j \ l_j > 0; \\ \max r; \\ i \in I', j \in J', \end{cases} \tag{15}$$

представляет собой модель расширяющейся экономики Дж. фон Неймана, если I' трактовать как множество экономических благ; J' — множество технологических процессов; i — индекс блага; j — индекс технологического процесса; t — индекс периода времени; l_{jt} — интенсивность технологического процесса j в периоде t; a'_{ij} — выпуск блага i производственным процессом j в единицу времени; a''_{ij} — затраты блага i в производственном процессе j в единицу времени; r — темп роста производственной системы.

Модели фон Неймана соответствует двойственная модель

$$\begin{cases} \forall j \ \sum_i a'_{ij} p_i \le r' \sum_i a''_{ij} p_i; \\ \forall i \ p_i \ge 0; \\ \min r', \end{cases} \tag{16}$$

где p_i — оптимальная цена блага i; r' — экономический темп роста производственной системы, обычно интерпретируемый как альтернативная стоимость капитала.

Предположим, что матрицы (a'_{ij}) и (a''_{ij}) неразложимы. Из этого предположения следует равенство оптимальных значений r и r'. Тогда матрица $\bar{\mathbf{A}}$ имеет вид

$$\left(a'_{ij} - ra''_{ij}\right),\ i\in I^*,\ j\in J^*, \tag{17}$$

где I^{**} — множество благ, для которых $\sum_j a'_{ij}\, l_{jt} = r \sum_j a''_{ij}\, l_{jt+1}$; J^{**} — множество технологических процессов, для которых $\sum_i a'_{ij}\, p_i = r' \sum_i a''_{ij} p_i$; I^* — множество любых min(#I^{**}, #J^{**}) благ, для которых $\sum_j a'_{ij}\, l_{jt} = r \sum_j a''_{ij}\, l_{jt+1}$; J^{**} — множество любых min(#I^{**}, #J^{**}) технологических процессов, для которых $\sum_i a'_{ij}\, p_i = r' \sum_i a''_{ij} p_i$. Столбцы этой матрицы представляют собой линейную комбинацию с коэффициентами (l_j), строки — с коэффициентами (p_i).

Если определить чистые затраты блага как затраты блага технологическим процессом, не покрытые собственным выпуском этого блага в прошлом периоде, а чистый выпуск — как выпуск прошлого периода, превышающий потребность текущего, то матрица (17) может быть интерпретирована как матрица коэффициентов чистых затрат (выпуска) по благам и технологическим процессам, вошедшим в множества I^* и J^* соответственно. Матрица **V** в этом случае имеет вид

$$\left(a'_{ij} - r''a''_{ij}\right),\ i\in I^*,\ j\in J^*,\ r''<r,\ r''\to r.$$

Коэффициенты матрицы **W**, соответствующие ограниченным благам и используемым технологическим процессам, в этом случае представляют собой дополнительные интенсивности технологических процессов, соответствующих строкам, необходимые для производства дополнительных единиц благ, соответствующих столбцам, при приближении к полной сбалансированности экономической системы. Они также могут быть рассмотрены как приросты цен благ, соответствующих столбцам, доставляющие единичные дополнительные прибыли технологическим процессам, соответствующим строкам.

Любая строка матрицы **W** (кроме элементов, соответствующих благам, не являющимся ограниченными), соответствующая используемому технологическому процессу, стремится к вектору $p_i/(r''-r)$, столбец (кроме элементов, соответствующих технологическим процессам, не являющимся используемыми), соответствующий ограниченному благу, — к вектору $l_j/(r''-r)$. Таким образом, при почти полной сбалансированности экономической системы верно следующее:

— цены почти пропорциональны величинам приростов интенсивностей любых используемых технологических процессов на производство дополнительной единицы данного ограниченного блага;

— цены ограниченных благ почти обратно пропорциональны их чистым выпускам при заданной интенсивности некоторого используемого технологического процесса и нулевых чистых выпусках остальных благ;

— стоимости чистых выпусков благ при заданной интенсивности некоторого используемого технологического процесса и нулевых чистых выпусках остальных благ почти равны для всех ограниченных благ.

При $k = 0$ соотношения любых двух коэффициентов одной строки матрицы **W** (если только каждый из них соответствует используемому технологическому процессу и ограниченному благу) равны соотношению цен соответствующих благ и означают пропорцию, в которой данная экономическая система допускает взаимозамену выпуска двух данных благ. При нарушении этой пропорции и сохранении сбалансированности по остальным благам экономическая система неработоспособна: не существует значений l_j, обеспечивающих то же самое оптимальное значение r.

В модели фон Неймана цены полностью определяются эндогенно. Тем самым показывается, что для объяснения сущности и величины цен в общем случае не требуется экзогенно вводить никаких внеэкономических мерил ценности. С другой стороны, среди сторонников субъективных теорий ценности существует мнение, что отсутствие субъективной причины цен в модели Неймана является свидетельством её неприменимости для объяснения сущности ценовых пропорций в реальных экономических системах.

5. Балансовые свойства модели конкурентной экономики Эрроу-Дебре

Модель конкурентной экономики Эрроу-Дебре может быть записана (если опустить некоторые несущественные для нас допущения) в следующем виде:

$$\begin{cases} Y = \sum\limits_m Y_m \text{ (совокупное технологическое множество);} \\ \mathbf{a} = \sum\limits_m \mathbf{a}_m \text{ (совокупный выпуск);} \\ \mathbf{s} = \sum\limits_k \mathbf{s}_k \text{ (совокупная начальная собственность);} \\ \mathbf{x} = \sum\limits_k \mathbf{x}_k \text{ (совокупный спрос);} \\ \mathbf{x} \leqq \mathbf{s} + \mathbf{a} \text{ (баланс спроса и предложения);} \\ \pi_m = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_m = \max\limits_j \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_{jm}\ \forall j \in J_m \text{ (баланс прибыли);} \\ \mathbf{x}_k = \sup(X'_k, \succsim_k)\ \forall k \in K \text{ (оптимум предпочтений);} \\ \mathbf{p} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{x}_k \geq \mathbf{0},\ \mathbf{s}_k \geq \mathbf{0}; \\ i \in I',\ m \in M,\ k \in K. \end{cases} \tag{18}$$

В модели i означает индекс блага, I' — множество благ; m — индекс производителя, M — множество производителей; k — индекс потребителя, K — множество потребителей; $(X_k, \succsim_k)$ — поле предпочтений $\succsim_k$ k-го потребителя на множестве X_k возможных для него наборов потребительских благ $\mathbf{x}_k$; x_{ik} — спрос потребителя k на благо i; $\mathbf{x}_k \in X_k$ — вектор спроса потребителя k; $\mathbf{x}$ — вектор совокупного потребительского спроса; s_{ik} — первоначальный запас блага i у потребителя k; $\mathbf{s}_k$ — вектор первоначальных запасов потребителя k; $\mathbf{s}$ — вектор совокупных первоначальных запасов;

J_m — множество технологических способов, доступных производителю m; J' — множество всех технологических способов; Y_m — производственно-технологическое множество векторов потоков $\mathbf{a}_{jm}$, $j \in J_m$, состоящих из величин потоков благ a_{ij}; $\mathbf{a}_m$ — вектор потоков, выбранный производителем m из числа доступных ему векторов $\mathbf{a}_{jm}$; a_{im} — элементы вектора $\mathbf{a}_m$; Y — совокупное производственно-технологическое множество векторов потоков $\mathbf{a}_{jm}$, $j \in J'$; $\mathbf{a}$ — совокупный процесс; p_i — цена блага i; $\mathbf{p}$ — вектор цен; π_m — прибыль производителя m; α_{km} — доля потребителя k в прибыли производителя m;

$$X'_k = \{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_k \in X_k,\ \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k \leq \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_k + \sum_m \alpha_{km}\pi_m\}$$

— множество возможных потребительских наборов потребителя k, для которых выполняется его бюджетное ограничение.

$\forall k\ \forall m\ (\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_m)$ называется *совместным распределением производства и потребления*, $\forall k\ \forall m\ (\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_m, \mathbf{p})$ — *конкурентным равновесием*.

Теоретическая конструкция модели нацелена на доказательство существования некоторого полуположительного вектора цен, обеспечивающего совместность системы (18). Совместность системы (18) означает принципиальную возможность существования рыночного равновесия (в понимании, обусловленном семантикой модели) в экономических системах. Хотя соотношения цен, соответствующие условиям данной системы, представляют несомненный интерес для исследования, автору неизвестны работы, посвящённые их изучению.

На основе системы (18) можно построить по меньшей мере три различных варианта матрицы $\bar{\mathbf{A}}$.

Первая из них имеет вид

$$\left(\frac{a_{im}}{\pi_m} \middle| \frac{\sum_n a_{in} + \sum_k s_{ik} + \sum_k x_{ik}}{\sum_n \pi_n + \sum_k \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_k + \sum_k \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k} \right),$$

где $i \in I^*$, $m \in M^*$, $k \in K$, $n \in M \backslash M^*$, $I^* \subseteq I^{**}$, $M^* \subseteq M$, $I^{**} \subseteq I$ — множество благ, для которых баланс спроса и предложения выполняется как строгое равенство, $\#I^* = \#M^* = \min(\#I^{**}, \#M)$.

Вторая —

$$\left(\frac{x_{ik}}{\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k} \middle| \frac{\sum_n x_{in} + \sum_m a_{im} + \sum_k s_{ik}}{\sum_n \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_n + \sum_m \pi_m + \sum_k \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_k} \right),$$

где $i \in I^*$, $k \in K^*$, $m \in M$, $n \in K \backslash K^*$, $I^* \subseteq I^{**}$, $K^* \subseteq K$, $I^{**} \subseteq I$ — множество благ, для которых баланс спроса и предложения выполняется как строгое равенство, $\#I^* = \#K^* = \min(\#I^{**}, \#K)$.

Третья —

$$\left(\frac{s_{ik}}{\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_k} \middle| \frac{\sum_n s_{in} + \sum_m a_{im} + \sum_k x_{ik}}{\sum_n \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_n + \sum_m \pi_m + \sum_k \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_k} \right)$$

(семантика коэффициентов та же, что и для второй).

Столбцы всех трёх матриц составляют линейную комбинацию с коэффициентами, равными единице (следовательно, строго базисных столбцов в этих матрицах быть не может), строки — с коэффициентами $(p_i|1)$.

Для построения матриц $\mathbf{V}$ используем тот же подход, что и при анализе межотраслевого баланса, разложив последний столбец (можно и любой другой) на два, и рассмотрим коэффициенты матрицы $\mathbf{W}$. Для всех трёх случаев все строки этой матрицы будут почти одинаковы (предел отношения соответствующих коэффициентов любых двух строк при $k \to 0$ равен 1, если коэффициенты соответствуют ограниченному благу), а столбцы пропорциональны ценам (кроме столбцов, не соответствующих ограниченным благам).

Технико-экономическая интерпретация коэффициентов любой матрицы $\mathbf{W}$ для рассматриваемой модели может быть выполнена по образцу интерпретации коэффициентов соответствующей матрицы в модели межотраслевого баланса при предположении, что размеры производителей, потребителей, собственников могут меняться, что влечёт за собой пропорциональное изменение величин a_{im}, x_{ik}, s_{ik} в столбцах соответствующих матриц $\bar{\mathbf{A}}$. Однако такое предположение не вполне согласуется с логикой модели Эрроу-Дебре и поэтому представляется неоправданным. В общем случае для всех трёх вариантов матрицы $\bar{\mathbf{A}}$ коэффициенты матрицы $\mathbf{W}$ не поддаются технико-экономической интерпретации.

6. Цена как параметр модели и как экономическая категория

Причиной применения одного и того же математического аппарата для анализа различных математических моделей состоит в том, что все они по-разному отражают одну и ту же реальность. Ей объективно присущи балансовые свойства, которые учитываются всеми рассмотренными моделями. Различия между ними с точки зрения балансов благ состоят в различных группировках благ по способам их производства и направлениям использования и в различных методах выбора точки сбалансированности.

Все четыре модели, рассматриваемые как формальные балансовые системы, позволяют установить наличие связи между матрицей $\mathbf{W}$ и ценами, причём во всех случаях коэффициенты, соответствующие ограниченным благам (продуктам, ресурсам), любой её строки (кроме соответствующей строго базисному столбцу матрицы $\bar{\mathbf{A}}$), пропорциональны ценам этих благ. Однако в трёх моделях (кроме неймановской) сами коэффициенты матрицы **W** решающим образом зависят от экзогенно заданных параметров — стоимостных, отражаемых в строке стоимостного баланса, либо материальных, отражаемых в форме целевых наборов ресурсов.

Рассмотрение моделей Леонтьева и Канторовича позволяет показать, что произвольное задание вектора цен существенным образом сказывается на условия материальной и финансовой сбалансированности экономических систем: при почти полной сбалансированности обеспечение единичного чистого выпуска ограниченного блага, цена на которое повышена вдвое, потребует приблизительно вдвое (с тем большей точностью, чем меньше дисбалансы) более высокой интенсивности всех используемых технологических процессов, чем до повышения цены.

Неймановская модель специфична: в ней отсутствует строка стоимостного баланса, что позволяет показать принципиальную возможность существования объективных цен, по крайней мере, в системах, в которые удаётся интерпретировать данную модель.

В [7] описывается ещё одна модель балансового типа, в которой стоимостной баланс присутствует, но формируется эндогенно: цены для его построения определяются на основе принципа равенства предельных издержек и предельной эффективности, с известной точностью отражающего реальный процесс принятия хозяйственных решений. В этой модели удаётся совместить эндогенное формирование стоимостного баланса с учётом активной роли людей, принимающих хозяйственные решения.

Принимая во внимание, что реальные народнохозяйственные системы в известной форме изоморфны каждой модели из числа рассмотренных, в хозяйственной практике могут наблюдаться свойства цен, раскрываемые каждой из этих моделей, поэтому цена как категория реальных экономических систем обладает значительно более широкой и разнообразной семантикой, нежели цена как переменная любой из упоминавшихся моделей. В

реальности мы можем наблюдать влияние на цены изменений технологического характера и влияние изменений в ценах вследствие внеэкономических причин на технологические пропорции, исходить из сложившихся цен как из объективной экономической реальности или рассматривать их как объект управления.

Результаты формального анализа дезагрегированных моделей экономических систем позволяют продемонстрировать роль цены как объективной характеристики хозяйственной ситуации, складывающейся под влиянием, во-первых, свободного выбора людей, во-вторых, производственной необходимости. Эта характеристика во многих случаях поддаётся интерпретации в терминах интенсивностей технологических процессов. Поэтому влияние изменений в параметрах экономической системы, описывающих технологии, запасы, потребительский выбор, на цены, с одной стороны, и интенсивности технологических процессов, с другой, имеет, в сущности, одну и ту же материальную природу.

Мнения исследователей относительно того, какая из двух причин, формирующих хозяйственную ситуацию — поведение людей или свойства технологий — является определяющей при формировании ценовых (а следовательно, как видим, и технологических) пропорций, расходятся, что явилось причиной разделения всех существующих теорий цены на субъективные и объективные. Строго научный подход к анализу содержания категории цены требует учитывать обе составляющих, выбирая адекватный теоретико-методологический и математический аппарат в зависимости от специфики конкретной научной проблемы, в рамках которой исследуется категория цены. Однако в любом случае при рассмотрении народного хозяйства в форме системы балансов анализ цены может производиться только в синтезе с анализом технологических пропорций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аганбегян А.Г., Багриновский К.А., Гранберг А.Г. Система моделей народнохозяйственного планирования. М.: Наука, 1972.

2. Гранберг А.Г. Моделирование социалистической экономики: Учеб. для студ. экон. вузов. — М.: Экономика, 1988.

3. Канторович Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1960.

4. Макаров В.Л. Состояния равновесия замкнутой линейной модели расширяющейся экономики // Экономика и математические методы, 1965. — т.1, №5.

5. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.

6. Светлов Н.М. Технико-экономическая интерпретация объективно обусловленных оценок // Актуальные проблемы повышения экономической эффективности сельскохозяйственного производства: Сборник трудов научной конференции молодых ученых и специалистов экономического факультета ТСХА 25 июня 1996 г. М., 1996. (Рукопись депонирована в НИИТЭИАгропром)

7. Светлов Н.М. Система цен в условиях общего равновесия // Актуальные проблемы повышения экономической эффективности сельскохозяйственного производства: Сборник трудов научной конференции молодых ученых и специалистов экономического факультета ТСХА 25 июня 1996 г. М., 1996. (Рукопись депонирована в НИИТЭИАгропром)

8. Gale D. General equilibrium for linear models. RAND Corp., 1957.

9. Debreu G. Theory of Value. New York, 1959.

10. von Neumann J. A model of general economic equilibrium // Rev. Econ. Studies, 1945-1946, vol. 13.