

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Московская сельскохозяйственная академия им. К.А. Тимирязева

УДК 330.101.541:31

Н.М. Светлов

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРА
НАЦИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ:
ТЕОРЕТИКО-СТОИМОСТНОЙ ПОДХОД**

Москва 2001

1. Значение проблемы размера национальной экономики

Измерение размера экономических систем национального уровня¹ — условные решения ряда актуальных задач, возникающих при обосновании новой и анализе ранее осуществлявшейся экономической политики, формировании государственного бюджета, национальных инвестиционных программ, совершенствовании законодательства, регулирующего экономическую деятельность. Среди этих задач выделим следующие:

- ◆ *Измерение экономического роста* предполагает сравнение размера экономической системы в различные моменты времени.
- ◆ При *оценке уровня благосостояния* населения необходимо определять отношение темпа экономического роста к темпу роста населения.
- ◆ *Измерение уровня инфляции* требует отслеживать изменение во времени отношения оценки совокупности всех наличных экономических благ в действующих ценах к размеру экономической системы.
- ◆ Если известен размер экономической системы, не составляет труда *межнациональное сопоставление экономического потенциала*.

Для решения каждой из перечисленных задач разработаны более или менее приемлемые и общепризнанные методики. Но у них есть существенный недостаток: они подменяют предмет измерения. Существенна не столько *количественная* ошибка, порождаемая этой подменой, сколько неясность относительно измеримости размера национальной экономики и даже относительно самого *существования* предмета измерения. Пока не имеет строгого определения понятие «размер экономической системы», остаются неопределёнными и такие понятия,

¹ Далее в статье под экономическими системами будут пониматься только экономические системы национального уровня.

как «экономический рост», «рост благосостояния населения», «уровень инфляции».

Размер экономической системы и стоимость её валового внутреннего продукта (ВВП), при посредстве которого обычно и характеризуют размер национального хозяйства, — отнюдь не одно и то же. ВВП — это показатель, используемый по общему согласию для характеристики размера экономической системы. Расчёт его основан на многочисленных соглашениях и предположениях, которые предназначены не для упрощения и упорядочения статистического наблюдения либо характеристики конкретной стороны сложного явления (как, например, в случае разнообразных показателей дохода, отражающих разные стороны явления, суть которого вполне выяснена, описана формально и в доступной форме изложена в учебниках), а для того, чтобы обойти крупную экономическую проблему: неопределённость самой сущности размера экономической системы. Все согласны с тем, что размер экономики можно измерить при посредстве ВВП. Но никто ещё не взялся объяснить, что представляет собой этот размер на самом деле¹.

¹ Ближе всех к решению этой задачи подошёл Л.В. Канторович [3]. Его подход взят за основу и в данной статье. Суть предлагаемого в ней решения состоит в преодолении ограниченной «объясняющей способности» общей задачи народнохозяйственного планирования Канторовича. Для свёртки системы разнообразных целей, детерминирующих поведение экономической системы, в единый критерий в [3] использованы экзогенные коэффициенты, которые в те времена не могли получить интерпретацию, поскольку ещё не было получено необходимых для этого теоретических результатов в области математического программирования. С позиций сегодняшнего дня ясно, что значения этих коэффициентов, специфические для каждого оптимума по Парето, в принципе можно оценить.

Как следствие, экономический рост — это не то же самое, что рост валового внутреннего продукта (ВВП). Понятие экономического роста ныне строго определено только для ряда частных случаев. В основе формализации экономического роста лежит знаменитая работа Дж. фон Неймана [14]. В [8] показано, что формальный измеритель экономического роста существует, пока множество технологических процессов остаётся неизменным, а не только на неймановских траекториях сбалансированного экономического роста, когда запасы всех благ растут с одним и тем же темпом. Но и этот частный случай чрезвычайно узок по сравнению с экономическими реалиями. Общее решение проблемы размера экономической системы означало бы существование объективного измерителя темпа роста экономики при любых условиях, при которых размер экономической системы измерим.

Данная статья имеет целью дать формальное определение и доказать объективную измеримость размера экономической системы для максимально общего случая и обсудить значение полученных формальных результатов для практики. Построение методики практического измерения экономической системы в число задач данной статьи не входит.

Под термином «определение размера» в статье всегда имеется в виду не количественное его выражение, а формальное определение (*дефиниция*). Термин «экономическая система» соответствует региональной, национальной или мировой экономике, представленной в форме переменных и отношений между ними — в отличие от понимания этого термина в зарубежной и переводной экономической литературе, где понятие «экономическая система» относится к системе хозяйствования, как-то плановой, рыночной, смешанной, переходной.

Для удобства читателя в приложении приведены редко встречающиеся математические обозначения и понятия из области математического программирования, использованные в статье.

2. Проблема соизмерителя благ

Зададимся вопросом: что следует понимать под размером национальной экономики?

Во-первых, эта категория должна означать единое количественное выражение многообразных и разнородных благ, составляющих в совокупности накопленное ею богатство.

Во-вторых, оценка каждого блага при определении размера национальной экономики должна отражать его значимость для *этой* экономики.

В-третьих, размеру национальной экономики должна соответствовать объективная реальность, не зависящая от соображений исследователя относительно её природы. Иными словами, размер должен соответствовать реально существующему, познаваемому и в принципе допускающему количественное выражение явлению, суть которого состоит в наличии определённой суммы богатства, накопленного данной экономикой, включая все её подсистемы.

Эти утверждения лишь частично снимают неопределённость смысла исследуемой категории, но не исключено, что уже они выходят за рамки реальности. Существует ли *явление*, соответствующее введённой нами категории? Разумеется, если явления не существует, то и категория оказывается надуманной, бессмысленной. Если явление существует, возникает следующая задача — установить связь между ним и выражающими его показателями. В рамках статьи обосновывается существование размера экономической системы как категории, согласующейся со сформулированными выше требованиями, и охарактеризованы возможности выражения этого явления через посредство некоторой системы показателей.

Экономику составляют накопленные ею блага. Значит, проблема размера национальной экономики сводится к соизмерению разнородных благ. Использование для этой цели рыночных цен оказывается неприемлемым по ряду причин.

- ◆ Цена характеризует конкретную сделку или некоторое множество сделок, но не благо. Установить рыночную цену блага, на являющегося в данный момент предметом сделки, в общем случае невозможно.
- ◆ Рыночные цены в общем случае не объективны даже в рамках сделки. Например, они могут быть объектом регулирования или (при наличии достаточно больших запасов благ) инструментом конкурентной политики и вследствие этого не обеспечивать равновесия спроса и предложения.
- ◆ Цены различных экономических систем несоизмеримы по масштабу. Часто в практике соизмерения цен различных экономик используют рыночные курсы валют или, при их отсутствии, условные курсы — соотношения оценок фактического внешнеторгового оборота данной страны в ценах внутреннего и мирового рынка [13]. Но рыночные курсы валют формируются под влиянием ситуации на валютном рынке, которая зависит от национальной финансовой политики, и зачастую не отражают соотношения покупательных способностей валют. Условные курсы зависят от того, какие товары оказываются предметом внешней торговли конкретной экономики, и также не могут претендовать на роль объективного соизмерителя масштабов цен.

В литературе обсуждается возможность соизмерения благ полными издержками их производства [5, 11]. Исчисление полных общественных издержек предполагает такую спецификацию конечного продукта, при которой $y \rightarrow 0$, где y — вектор конечного продукта. Действительно, в противном случае y не рассматривается как затраты, т.е. исключается из состава полных общественных издержек вопреки их определению. Однако при $y \rightarrow 0$ полные затраты любого ограниченного блага на производство единицы данного блага стремятся к бесконечности. Поэтому практически реализованные методики аппроксимации полных общественных издержек явно или неявно предполагают выделение по тому или иному критерию ненулевого конечного продукта из состава общественного продукта. Следовательно, фактически они позволяют определить не полные общест-

венные издержки, а полные затраты того или иного блага — труда [1] или энергии [6] на производство *дополнительной* единицы блага (т.е. на единичное увеличение соответствующего компонента вектора чистого продукта). Отношения этих показателей по любой паре благ можно рассматривать как приближение к отношению действительных полных общественных издержек, тем более точное, чем меньше оказывается *y* согласно его спецификации, принятой в конкретной методике.

Полные общественные издержки, взятые в относительном выражении, как следует из [10], не зависят от того, в каком ограниченном благое их измерять. В случае полных затрат это не так. Выбор конкретного блага (труд, энергия) в качестве меры полных затрат оказывается не вполне очевидным. В [2] приведён существенный аргумент в пользу выбора для этой цели труда (безусловная ограниченность этого блага в любой экономической системе в корректной модели экономической системы), но из этого всё же не следует, что показатели полных затрат труда — единственно корректный соизмеритель благ. Доказывается лишь преимущество соглашения о соизмерении благ полными затратами труда перед другими соглашениями.

Показатели полных затрат свободны от многих недостатков рыночной цены как экономического измерителя и играют существенную роль в решении многих задач управления народным хозяйством и его отраслями. Но они не могут претендовать на то, чтобы полностью снять неопределённость соизмерителя благ для оценки размера экономической системы.

Единственный соизмеритель благ, отвечающий сформулированным выше требованиям, — это их стоимость [9]. Современная экономическая теория располагает необходимым теоретическим и методологическим потенциалом для того,

чтобы сформулировать математически строгое определение¹ стоимости благ, в основе которого лежат технологические возможности экономики. С формальной точки зрения множители Лагранжа (двойственные оценки) абстрактной многокритериальной задачи математического программирования², *точно воспроизводящей* мотивацию хозяйствующих субъектов и балансы благ в экономической системе, а следовательно, и поведение последней, суть количественное выражение стоимости благ для этой системы. Эти величины объективны. Отношение стоимости любых двух благ равно пределу отношения интенсивности (стремящейся к бесконечности) любого технологического процесса (используемого с ненулевой интенсивностью), необходимого для производства дополнительной единицы каждого из данных благ, при условии, что весь конечный продукт используется на цели, явно описанные в модели: воспроизводство фондов, трудовых ресурсов, внешне-торговые операции и возмещение потерь. Оно равно и отношению затрат *любого* блага (используемого в ненулевом количестве) в любом из этих процессов, равно как и в любой совокупности этих процессов, в т.ч. и во всех процессах, вместе взятых — т.е. соотношению полных общественных издержек производства единицы этих благ. Следовательно, значения стоимости отражают значимость блага для экономики, понимаемую как общественно признанную величину полных затрат на производство его единицы.

¹ Определение, которым мы пользуемся, не отражает всего содержательного богатства категории стоимости. Однако для наших целей требуется определение, конкретизация которого позволяет получить достаточно широкий класс более конкретных стоимостных категорий. В этот класс входит и категория общественной стоимости, соответствующая сложному общественному отношению между людьми по поводу благ.

² Понятие множителя Лагранжа многокритериальной задачи математического программирования вводится в п.3 приложения.

Величины стоимости носят маргинальный характер. Они оценивают размер экономики с точки зрения набора технологических процессов, фактически реализуемого в данном оптимуме по Парето, и их интенсивности¹. Естественное возражение против такой оценки следующее: правомерно ли всё имеющееся в экономике количество благ оценивать по стоимости, возникающей в данном оптимуме по Парето, хотя изменение количества доступных экономической системе благ наверняка приведёт к изменению их стоимости?

На самом деле данный подход единственно содержательный. Поясним, почему.

Однородная продукция любого технологического процесса продаётся примерно по одним и тем же ценам независимо от того, является ли этот процесс наиболее эффективным или, наоборот, маргинальным (т.е. наименее эффективным из используемых). Различия между ценами возможны, но они определяются случайными факторами, а не эффективностью технологического процесса, в котором произведено данное благо, т.к. покупатель о ней не осведомлён.

Продав эту продукцию, продавец приобретёт на вырученные средства некоторый набор благ, так что этот набор благ больше не будет доступен на рынке. Если продана продукция менее эффективного технологического процесса, в этом наборе будет больше (по стоимости) благ, непосредственно потребляемых технологическим процессом, чем в случае более эффективного технологического про-

¹ Следует уточнить, об оптимуме по Парето относительно какой системы ограничений идёт речь. Здесь мы считаем любое состояние, *фактически достигнутое экономической системой*, оптимальным по Парето, на том основании, что если бы у какого-либо хозяйствующего субъекта имелась возможность улучшить своё состояние, он бы это сделал. Но это оказалось невозможным, принимая во внимание доступные субъекту блага и имеющиеся (т.е. известные ему и возможные в данный момент) способы их использования.

цесса, но затраты экономики на производство этой продукции включают не только блага, непосредственно потребляемые этим процессом, но весь набор благ, который приобретён в обмен на эту продукцию. Экономическая система, основанная на рынке, не обладает ни одним способом различения однородной продукции, произведённой способами разной эффективности, поэтому у неё нет альтернативы обретения данного набора благ ценой затрат, меньших по стоимости, нежели набор благ, приобретаемый в обмен на данную продукцию, произведённую в наименее эффективном процессе.

У любого набора благ, приобретённого в обмен на единицу продукции, независимо от того, какую долю в нём занимают технологически обусловленные затраты, есть то общее, что предел отношения приростов интенсивности любого используемого (т.е. имеющего ненулевую интенсивность) технологического процесса, необходимого для производства любых двух таких наборов благ, равен единице.

Это значит, что в данном оптимуме по Парето экономической системы, основанной на рыночных принципах хозяйствования, при которых сделка заключается только по обоюдному согласию, всё имеющееся количество блага однородно по его стоимости: маргинальная оценка соотношения приростов интенсивности технологических процессов оказывается единственной оценкой для всего количества блага, которое имеется в распоряжении экономической системы.

Предложив соизмерять блага их стоимостью, мы должны дать строгое формальное определение стоимости, в полной мере учитывающее конкретику процессов преобразования благ, происходящих в реальной экономике.

3. Теоретическая модель стоимости благ в мировой экономике

Чтобы воспользоваться стоимостью благ как их соизмерителем для определения понятия «размер экономической системы», в общем случае необходима абстрактная (теоретическая) модель, имеющая форму многокритериальной зада-

чи математического программирования и представляющая состояние мирового хозяйства как один из возможных оптимумов по Парето.

Эта модель может полностью абстрагироваться от факторов, приведших к выбору именно этого оптимума по Парето, и быть совершенно непригодной для того, чтобы определить множество решений, оптимальных по Парето, для тех или иных заданных начальных условий. Но она должна содержать в себе всю информацию, которая существенна для значений множителей Лагранжа её ограниченный при условии, что данный оптимум по Парето уже достигнут. В частности, нет необходимости явно учитывать в модели финансовые процессы или экстерналии, но необходимо принимать во внимание ограничения на возможности обмена и вообще распоряжения благами. Не требуется предполагать, что фирмы максимизируют прибыль, но следует учесть все потребности, фактически присущие людям и определяющие принимаемые ими экономические решения. Ниже мы аргументируем эти и другие подобные утверждения, касающиеся идеологии модели.

Использование предпочтений хозяйствующих субъектов в качестве целевых функций для нашей цели неприемлемо. Предпочтения, понимаемые как отношение порядка, заданное на множестве наборов благ, в общем случае нельзя считать независимыми от стоимости благ. Поэтому в рамках модели, цель которой — определение стоимости, пользоваться ими неправомерно¹.

Как показали исследования, представленные в [7], при использовании формализма математического программирования представление целей поведения

¹ Классическая модель конкурентного равновесия Вальраса [15], оперирующая предпочтениями, имманентными хозяйствующим субъектам, сыграла огромную роль в обеспечении прогресса теоретико-стоимостных исследований. Однако её интерпретация существенно ограничена предположением, что до образования цен равновесия обменов не происходит, а предпочтения остаются неизменными.

экономических систем, адекватное задаче определения стоимости, предполагает структуризацию мотивации поведения хозяйствующих субъектов. В структуре мотивации выявляются конкретные потребности, в числе которых выделяются насущные (объективные) и ненасущные.

Насущные потребности должны быть удовлетворены в полном объёме для обеспечения существования человека как биологического и социального существа. Они не могут быть удовлетворены в объёме большем, нежели полный. Выбор набора и очерёдности удовлетворения ненасущных потребностей обусловлен субъективно, но способы удовлетворения присущи самим потребностям и не зависят от субъекта. Степень удовлетворения ненасущных потребностей может быть различной. Она зависит от приоритетов удовлетворения той или иной ненасущной потребности, определяемых субъектом, наличия благ для удовлетворения той или иной потребности и, наконец, от случайности.

В [7] показано, что существует достаточно обширный для экономической интерпретации класс правил соизмерения потребностей, которые обеспечивают состояние оптимума по Парето относительно этих потребностей (см. п.5 приложения). Следовательно, результаты, верные для любого оптимума по Парето модели, основанной на предположении о независимости ненасущных потребностей, верны для любой модели, в которой ненасущные потребности тем или иным способом соизмеряются (но не наоборот). Поэтому в качестве целевых функций абстрактной модели мирового хозяйства предлагаются уровни удовлетворения каждой потребности (насущной и ненасущной) *в целом по мировой экономике*. При этом уровень удовлетворения насущных потребностей естественно выражать в количестве человек, чьи насущные потребности удовлетворены.

Под оптимумом по Парето здесь, как уже отмечалось выше, понимается фактически достигнутое экономической системой состояние. Имеется в виду, что хозяйствующие субъекты не могли улучшить своё состояние в большей степени, чем они это сделали реально, т.к. либо не знали, как это сделать, либо не имели

достаточного количества благ, а решения, направленные на увеличение их количества, блокировались другими хозяйствующими субъектами. В то же время мы считаем, что все полезные данному субъекту решения, которые ухудшают состояния других субъектов, но не могут быть ими блокированы, были приняты. Это значит, что все отрицательные экстерналии считаются уже полученными.

Выбор одного из многочисленных оптимумов по Парето зависит от распределения доходов между хозяйствующими субъектами. Однако в рамках стоящей перед нами задачи в учёте финансовых процессов вообще и распределения доходов в частности необходимости нет. Дело в том, что:

- ◆ мы будем рассматривать свойства, присущие любому оптимуму по Парето независимо от того, каким образом он выбран;
- ◆ любой финансовый баланс можно рассмотреть как баланс некоторого нематериального блага, выпускаемого и потребляемого в соответствии с технологиями, которые доступны хозяйствующим субъектам, так что исключение из модели явного описания финансовых процессов — существенных детерминантов множителей Лагранжа — не приводит к нарушению гомоморфизма модели её объекту.

Основу системы ограничений модели составляют балансы благ, преобразование которых происходит при посредстве технологических процессов, характеризующихся интенсивностью (зависимость затрат и выпуска благ в рамках данного технологического процесса от его интенсивности может быть нелинейной). За основу понятия «блага» в модели взято определение блага в [12], расширенное представлением о том, что благо предполагает, наряду с качественной, пространственной и временной определённой, определённую собственника. Иными словами, две единицы блага, одного и того же в смысле [12], но находящиеся в собственности разных хозяев, в модели представляются как единичные количества разных благ. Как следствие, процесс передачи блага другому собственнику в

модели описывается в форме технологического процесса¹. Эта форма позволяет учесть всевозможные транзакционные издержки.

Факт существования фиксированных цен отражается в форме технологического процесса одновременного преобразования наборов благ двух собственников в строго заданных пропорциях.

Ниже перечислены ограничения и переменные модели, отвечающей перечисленным условиям.

Переменные:

- ◆ по интенсивности каждого технологического процесса в каждой национальной экономике;
- ◆ по интенсивности внешнеторговых операций для каждой пары национальных экономик;
- ◆ по уровню удовлетворения каждой потребности в мировой экономике.
- ◆ Основные ограничения:
 - ◆ балансы благ в каждой национальной экономике;
 - ◆ действующие соглашения и ограничения по поводу объёмов внешней торговли.
 - ◆ Предполагается, что модель воспроизводит реальное поведение мировой экономики за счёт:
 - ◆ выбора оптимума по Парето, соответствующего фактическим значениям уровней удовлетворения потребностей людей;
 - ◆ включения фактически имеющихся потерь в состав необходимых (технологически обусловленных) затрат;
 - ◆ описания фактических условий внешней торговли.

¹ Естественно, для благ, вносящих вклад в удовлетворение потребностей данного собственника, такой процесс будет задействован только в том случае, если имеет место ответное действие других собственников — передача их благ данному собственнику.

Индивидуумы в модель в явном виде не вводятся. Это обусловлено тем, что множество индивидуумов, если бы мы включили его в модель, зависело бы от времени. Кроме того, индивидуумов из-за возможности двойного гражданства и постоянного проживания за рубежом не так просто отнести к той или иной национальной экономике, как блага. Последние относятся к национальным экономикам в соответствии с таможенными правилами. Блага, находящиеся по каким-либо причинам вне таких правил, считаются достоянием мировой экономики и не включаются в расчёт размера ни одной из национальных экономик. Однородные (в смысле [12]) блага, фактически принадлежащие разным хозяйствующим субъектам, считаются разными, но индекс принадлежности данному субъекту, в отличие от индекса принадлежности данной национальной экономике, им не приписывается.

Исключение из модели явного описания хозяйствующих субъектов может быть предметом критики: это приводит к обезличиванию технологических процессов. Следовательно, субъект, принимающий решение об интенсивности данного процесса, в модели не указан. Получается, что ради максимизации уровня удовлетворения некоторой потребности любой субъект может установить выгодную для него интенсивность любого технологического процесса при условии, что это решение не блокируется другими субъектами.

На самом деле этой проблемы в модели не возникает, т.к. блага, принадлежащие различным субъектам, считаются различными. Если некоторое благо входит в какой-либо технологический процесс, значит, владелец этого блага не возражает против использования этого блага в данном технологическом процессе при его данной интенсивности. Круг лиц, принимающих решение об интенсивности технологического процесса, ограничивается собственниками используемых в нём благ.

Сделанные предположения не носят упрощающего характера, не ограничивают общность модели, а только придают ей максимально удобную для после-

дующего анализа форму, сохраняя достижимость стоящей перед ней цели — измерения благ.

Модель связывает переменные (x_{jt} , $j \in J_{xt}$, $t \in T$; n_{jt} , $j \in J_n$; s_{jt} , $j \in J_s$; $e_{ikk't}$, $i \in I_k$, $k \in K$, $k' \in K$, $t \in T$), обозначающие соответственно интенсивность технологических процессов, численность индивидуумов, обладающих насущными потребностями вида j , уровни удовлетворения ненасущных потребностей каждого вида для всех индивидуумов в совокупности и экспортно-импортные операции. Здесь T — целочисленное множество моментов времени, описываемых моделью, причём $\inf(T) = 0$ и $\sup(T) = \tau$; J_{xt} — множество технологических процессов, определённое для каждой экономической системы $k \in K$ и каждого момента времени $t \in T$ (каждый технологический процесс может оперировать только благами, отнесёнными к одной и той же национальной экономике); J_n — множество насущных потребностей¹; J_s — множество ненасущных потребностей²; K — множество экономических систем (включая условную экономическую систему, содержащую блага, которые не могут быть отнесены ни к одной национальной экономике); I_k — множество благ, имеющихся в экономической системе k .

Наряду с этими, в математической записи модели, приведённой ниже, используются следующие обозначения.

¹ Различия в насущных потребностях индивидуумов обусловлены особенностями природно-климатических и социокультурных условий.

² Множество включает все ненасущные потребности каждого индивидуума во все моменты времени моделируемого периода. Если в конкретный момент времени некоторые потребности у конкретного индивидуума отсутствуют, считается, что уровень их насыщения равен нулю.

Множества: Z_j — связное замкнутое множество векторов $\mathbf{z}_j = (z_{ijk})$ затрат благ, относящихся к различным экономическим системам¹, на удовлетворение насущной потребности $j \in J_n$ одного индивидуума.

Отображения: $s_j(\mathbf{s}_t)$ — функция, отображающая уровень удовлетворения насущных потребностей $\mathbf{s}_t = (s_{jt})$ на *уровень насыщения* насущной потребности j ; $v_{ijkt}(x_{jt})$ — функция, отображающая интенсивность технологического процесса на неотрицательную величину затрат блага i в экономической системе k ; $w_{ijkt}(x_{jt})$ — функция, отображающая интенсивность технологического процесса на неотрицательную величину выпуска блага i в экономической системе k ; $U_j(s_{jt})$ — отображение уровня удовлетворения насущной потребности $j \in J_s$ на связное замкнутое множество неотрицательных векторов $\mathbf{u}_{jt} = (u_{ijkt})$ затрат благ, причём $U_j(0) = \{0\}$; $E'_{ikk't}(E'_{kt}, E''_{kt})$ — отображение неотрицательных матриц $E'_{kt} = (e'_{ikk't})$ расхода благ экономикой k на внешнеторговые операции с экономикой k' в момент t и $E''_{kt} = (e''_{ikk't})$ поступления благ в экономику k от внешнеторговых операций с экономикой k' в момент t на связное замкнутое множество значений интенсивности расходования блага i во внешнеторговых операциях с экономикой k' ; $E''_{ikk't}(E'_{kt}, E''_{kt})$ — отображение матриц E'_{kt} и E''_{kt} на связное замкнутое множество значений интенсивности поступления блага i от внешнеторговых операций с экономикой k' .

Параметры: B_{ikt} — поступление блага $i \in I_k$ в экономическую систему $k \in K$ в момент $t \in T$; B'_{ik} — запас благ, которым располагала экономическая система в момент 0; B''_{ik} — запас благ, которым располагает экономическая система в момент τ ; E'_{kt} и E''_{kt} , $t \in \{-1\}$ — состояние внешней торговли в момент времени, предшествующий моделируемому периоду.

Базовая теоретическая модель предполагает максимизацию:

¹ Это необходимо для описания удовлетворения потребностей индивидуумов, имеющих двойное гражданство или находящихся за рубежом.

- ♦ численности индивидуумов, насущные потребности которых обеспечены необходимыми благами;
- ♦ вектора ненасущных потребностей каждого индивидуума в каждый момент времени при условиях достаточности благ и обеспечения необходимого уровня удовлетворения насущных потребностей.

$$\max n_{jt}, j \in J_n, t \in T; \quad (1)$$

$$\max s_{jt}, j \in J_s, t \in T. \quad (2)$$

Ненасущные потребности могут быть насыщаемыми, а уровень насыщения зависит от уровня удовлетворения разнообразных насущных потребностей. Эта зависимость индивидуальна для каждого субъекта:

$$s_{jt} \leq s_j(\mathbf{s}_t), j \in J_s, t \in T. \quad (3)$$

Каждую потребность можно удовлетворить различными наборами благ, причём для ненасущных потребностей набор, удовлетворяющий данную потребность, может зависеть от достигнутого уровня удовлетворения насущных потребностей. С учётом этих зависимостей баланс благ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in J_n} z_{ijk} n_{jt} + \sum_{j \in J_s} u_{ijkt} + \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} e'_{ikk't} + \sum_{j \in J_s} w_{ijkt}(x_{jt}) \leq B_{ikt} + B'_{ik}, \\ & i \in I_k, k \in K, t \in \{0\}; \\ & \sum_{j \in J_n} z_{ijk} n_{jt} + \sum_{j \in J_s} u_{ijkt} + \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} e'_{ikk't} - \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} e''_{ikk't-1} - \sum_{j \in J_{s-t-1}} v_{ijk-t-1}(x_{jt-1}) + \sum_{j \in J_s} w_{ijkt}(x_{jt}) \leq B_{ikt}, \\ & i \in I_k, k \in K, t \in T \setminus \{0; \tau\}; \\ & \sum_{j \in J_n} z_{ijk} n_{jt} + \sum_{j \in J_s} u_{ijkt} - \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} e''_{ikk't-1} - \sum_{j \in J_{s-t-1}} v_{ijk-t-1}(x_{jt-1}) \leq B_{ikt} - B''_{ik}, \\ & i \in I_k, k \in K, t \in \{\tau\}; \\ & \mathbf{u}_{jt} \in U_j(s_{jt}), j \in J_s, t \in T; \\ & \mathbf{z}_j \in Z_j, j \in J_n. \end{aligned} \quad (4)$$

На внешнеторговые операции могут налагаться ограничения, которые зависят от текущего состояния внешнеторговых операций. Зависимость эта специфична для каждого момента времени:

$$\begin{aligned} e'_{ikk't} &\in E'_{ikk't}(\mathbf{E}'_{kt-1}, \mathbf{E}''_{kt-1}, \mathbf{E}''_{kt}), i \in I_k, k \in K, k' \in K \setminus \{k\}, t \in T \setminus \{\tau\}; \\ e''_{ikk't} &\in E''_{ikk't}(\mathbf{E}'_{kt-1}, \mathbf{E}''_{kt-1}, \mathbf{E}'_{kt}), i \in I_k, k \in K, k' \in K \setminus \{k\}, t \in T \setminus \{\tau\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Переменные модели неотрицательны, а интенсивности технологических процессов перед началом и на момент завершения моделируемого периода заданы:

$$\begin{aligned} x_{jt} &\geq 0, j \in J_x, t \in T; \\ n_{jt} &\geq 0, j \in J_n, t \in T; \\ s_{jt} &\geq 0, j \in J_s, t \in T; \\ e'_{ikk't} &\geq 0, i \in I_k, k \in K, k' \in K \setminus \{k\}, t \in T; \\ e''_{ikk't} &\geq 0, i \in I_k, k \in K, k' \in K \setminus \{k\}, t \in T. \end{aligned} \quad (6)$$

Из всех возможных оптимумов по Парето задачи (1)...(6) для нашего исследования представляет интерес тот, который соответствует реальности. Это значит, что в качестве соизмерителя стоимости благ мы принимаем фактически имеющие место (а не какие-либо другие) полные затраты любого блага на производство единицы данного блага. Вопрос о том, каким был бы размер экономики в ином оптимуме по Парето (т.е. при ином характере потребления), может представлять научный интерес, но эта проблема существенно отличается от проблемы определения *фактического* размера.

Вектор множителей Лагранжа задачи (1)...(6) можно нормировать произвольным образом. В частности, за единицу можно принять множитель Лагранжа по насущной потребности одного из видов, по какой-либо ненасущной потребности или по определённой благу. В каждом из этих случаев множители Лагранжа будут иметь разные единицы измерения. В общем случае единица измерения множителя Лагранжа по некоторому ограничению следующая: единиц блага или потребности, множитель Лагранжа по которому (которой) принят за единицу, в

расчёте на единицу измерения данного ограничения, при условии неизменности функциональной матрицы¹ модели.

Заметим, что условие неизменности функциональной матрицы не зависит от того, существуют ли соответствующие ограничения модели значения переменных, обеспечивающие выполнимость этих условий.

Нормированные векторы множителей Лагранжа модели (1)...(6) могут оказаться неединственными по двум причинам: в случае наличия альтернативных базисных миноров (связной) функциональной матрицы модели в данном оптимуме по Парето и в случае несвязности функциональной матрицы.

Альтернативные базисные миноры могут возникнуть по случайным причинам, специфическим для конкретного оптимума по Парето.

Несвязность функциональной матрицы может быть обусловлена следующими экономическими причинами:

- ◆ существованием человеческих общностей с автаркичной экономикой (таковые и в самом деле существуют, хотя и располагают ничтожным количеством благ по сравнению с остальной экономикой);
- ◆ стратификацией социума на слои, потребляющие продукты разного качества, для изготовления которых, соответственно, требуются сырьё и капитальные блага разного качества (это практически невозможно, т.к. вряд ли можно указать существенные различия в качестве, например, земли или электроэнергии, используемых для производства потребительских благ разного качества);
- ◆ существованием такого множества экономических систем, для которого в данном оптимуме по Парето эффективны внешнеторговые операции только в пре-

¹ Термин «функциональная матрица многокритериальной задачи математического программирования» определён в п.4 приложения.

делах этого множества (это маловероятно, но исключать такую возможность из теоретического анализа вряд ли было бы правильно).

Кроме того, несвязность базисного минора может возникнуть в случае отсутствия части информации для построения модели (1)...(6).

4. Показатели размера экономической системы

Благодаря модели (1)...(6) мы располагаем объективным и обладающим строго определённым смыслом соизмерителем различных благ, относящихся к различным экономическим системам. Следующий шаг исследования состоит в определении показателей, характеризующих размер экономической системы со стороны её стоимости и со стороны её способности поддерживать существование людей. Эти показатели также объективны и наделены строго определённым смыслом. При необходимости круг показателей размера экономической системы может быть расширен согласно тем исследовательским задачам, для решения которых они построены.

Из п.3 следует, что точкой отсчёта при измерении размера экономики служит функциональная матрица модели (1)...(6), соответствующая фактическому оптимуму по Парето экономической системы на интересующем исследователя отрезке времени. Пока эта матрица определена, размер экономических систем, описываемых этой моделью, сопоставим.

Первый из показателей — *стоимость экономической системы*. Он определяется по формуле

$$\begin{aligned} V_{kt} &= \sum_{i \in I_k} \lambda_{ik} \cdot (B_{ik} + B'_{ik}), k \in K, t \in \{0\}; \\ V_{kt} &= \sum_{i \in I_k} \lambda_{ik} \cdot (B_{ik} + v_{ijkt-1}(x_{jt-1}) + e_{ikk't-1}^*), k \in K, t \in T \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где λ_{ik} — множитель Лагранжа по балансу блага i в экономической системе k в момент времени t .

Соотношение стоимости двух национальных экономик показывает, *на сколько в одной из них полные затраты любого блага* (в частности, труда)

больше по сравнению с другой в предположении полного использования чистого продукта. Этот показатель аналогичен мощности в физике. На формальном уровне он даёт оценку интенсивности совокупного производственного процесса безотносительно к его целесообразности. Ведь этот показатель можно построить и в том случае, если ввести в модель цели, не имеющие ничего общего с потребностями, и он будет вполне соизмерим с показателями для экономически содержательного случая.

Будучи независимым (в вышеуказанном смысле) от целей, ради которых предпринимается производство, этот показатель объективно соизмеряет производственные возможности экономики в том её состоянии, которое обусловлено фактической реализацией целей. Следовательно, он экономически содержателен: ведь целесообразность производственных процессов, представленных моделью, гарантируется как свойствами моделируемого объекта — мирового хозяйства, так и конструкцией модели, в которой явно присутствуют цели производства в форме потребностей.

Единица измерения стоимости экономической системы — уровень удовлетворения той потребности или количество того блага, множитель Лагранжа которой (которого) принят за единицу, в предположениях:

- ♦ полного использования потенциала мировой экономики для достижения цели экономии блага¹ или удовлетворения потребности, множитель Лагранжа по которой принят за единицу;
- ♦ неизменности функциональной матрицы модели.

Эти условия не зависят от того, существуют ли соответствующие ограничения модели значения переменных, обеспечивающие их выполнение.

¹ «Сэкономленное» количество может превышать фактически имеющееся, т.к. условие неизменности базиса не согласуется с функциями v_{ijkt} , ω_{ijkt} и отбражениями U_i .

В рамках цели данной статьи существенно не абсолютное значение размера экономической системы, а относительное, именно отношение размера одной и той же экономической системы в разные моменты времени либо отношение размеров двух экономических систем в один и тот же момент времени. Эти отношения не зависят от того, каким образом нормирован вектор множителей Лагранжа, а значит, и от того, измеряется ли размер экономики в количестве индивидуумов, чьи насущные потребности удовлетворены, в уровне удовлетворения некоторой ненасущной потребности или в количестве некоторого блага.

Назовём оценкой потребителя множитель Лагранжа целевой функции, отражающей насущную потребность. Ограничения по насущным потребностям могут соответствовать неодинаковым оценкам потребителя. Причины различий следующие:

- ◆ различия в потребностях, обусловленные географической, климатической, социокультурной и физиологической спецификой;
- ◆ транзакционные издержки;
- ◆ ограничения внешней торговли.

Отношение двух оценок потребителей показывает, насущные потребности скольких потребителей, идентичных второму, окажутся не обеспеченными ресурсами в случае возникновения нового потребителя, идентичного первому, в предположении, что количество ресурсов и уровни удовлетворения остальных насущных и ненасущных потребностей остаются неизменными.

Если имеются потребители, оценки которых составляют соответственно 1 и 2, то мировая экономика в состоянии обеспечить существование второго потребителя при прочих равных условиях лишь тогда, когда два потребителя первого типа останутся без средств к существованию. Это обусловлено тем, что полные затраты любого блага на поддержание существования первого потребителя вдвое больше, чем второго. Следовательно, при одном и том же уровне полных затрат и одинаковых технологических возможностях экономика, поддерживающая двоих

потребителей первого типа, оперирует тем же набором благ, что и экономика, поддерживающая одного потребителя второго типа. Это рассуждение свидетельствует в пользу иного, нежели стоимость, измерителя размера экономики, т.к. в приведённом примере стоимость двух экономик одна и та же, а способности поддерживать существование людей разные.

Итак, второй показатель размера экономики — отношение её стоимости к средней оценке потребителя этой экономики:

$$V'_{kt} = \frac{V_{kt}}{\sum_{i \in I_k} \sum_{j \in J_n} \lambda_{ik} z_{ijk} n_{jt}}, k \in K, t \in T. \quad (8)$$

Он выражает потенциальную способность экономики к удовлетворению насущных потребностей дополнительных резидентов. Этот показатель в известной степени учитывает целенаправленность общественного производства, выделяя из системы целей необходимость полного удовлетворения насущных потребностей в качестве приоритетной — каковой она и является на деле. Выбор цели удовлетворения насущных потребностей в качестве нормы размера экономической системы обусловлен тем объективным фактом, что эта цель, в отличие от любой другой, заведомо присуща *каждому* индивидууму¹. Этот показатель замечателен тем, что он сопоставим даже для теоретического случая двух абстрактных экономик, которые совершенно не связаны друг с другом.

¹ В самом деле, определить «стоимость» какой-либо системы, следуя предложенному подходу, мы можем даже в том случае, если эта система вообще не удовлетворяет никаких потребностей, не имеет никакой определённой цели, а процессы преобразования благ происходят в ней в силу присущих ей свойств — лишь бы её состояние было таким, что выпуск ни одного из благ увеличить невозможно без сокращения выпуска другого блага. Но в этом случае «стоимость» имеет чисто физическое содержание. Отнесение же стоимости экономики к оценке потребителя возможно только в экономических системах, так что этот показатель изначально (по построению) наделён экономическим содержанием.

С формальной точки зрения смысл V'_{kt} отличается от V_{kt} методом соизмерения благ. При определении V'_{kt} оценки среднего потребителя каждой экономики а priori принимаются равными. Все остальные оценки в пределах каждой национальной экономики нормируются таким образом, чтобы направление вектора оценок благ данной национальной экономики осталось неизменным. В функциональной матрице задачи (1)...(6) в такой системе оценок не выполняются условия Куна-Таккера для переменных $e'_{ikk't}$ и $e''_{ikk't}$, связывающих блоки модели, соответствующие разным экономическим системам. Кроме того, может не существовать однозначной оценки некоторых потребностей.

Полученные оценки пропорциональны соответствующим полным затратам только в пределах национальной экономики. Зато гарантируется пропорциональность этих оценок совокупному сокращению количества индивидуумов, чьи насущные потребности полностью удовлетворены, необходимому для обретения единицы каждого блага.

Несложно доказать, что возникновение новых технологических способов при прочих равных условиях никогда не уменьшит размер экономической системы (каким бы из двух показателей мы её ни измеряли), но может её увеличить. Также очевидно, что если не известен ни один технологический способ, то стоимость экономики равна нулю. Следовательно, в экономической системе стоимость существует благодаря технологическим знаниям, и чем они обширнее, тем больше стоимость экономической системы. Можно поставить знак равенства между стоимостью экономической системы (т.е. стоимостью набора благ, которым она располагает) и стоимостью знаний, накопленных этой системой. При этом существенно, что знания и блага взаимообуславливают друг друга: ни знания без благ, ни блага без знаний стоимости не имеют. Поэтому попытки выяснить, ка-

кая часть стоимости экономики приходится на знания, а какая — на благо, некорректны в принципе¹.

Если в данном оптимуме по Парето задачи (1)...(6) существует более одного (нормированного) вектора множителей Лагранжа, то показатели размера экономической системы нельзя определить однозначно. Если функциональная матрица задачи связна, но имеются альтернативные базисные миноры, целесообразно определить стоимость экономики (выраженную, если возможно, в единицах одной и той же насущной потребности) и, соответственно, отдельно для каждого альтернативного базиса. Если же причина состоит в несвязности функциональной матрицы, то в качестве характеристики размера экономической системы можно пользоваться только показателем V'_{kt} .

Принятый в статье метод позволяет построить и другие показатели, характеризующие размер экономики с точки зрения специфических исследовательских задач.

На основе модели (1)...(6) можно не только оценить динамику роста экономической системы, но и проанализировать её. Положим $t \in T \setminus \{0\}$. Тогда темп роста экономической системы $(V_{kt} - V_{kt-1}) / V_{kt-1}$ может быть разложен на сумму трёх составляющих, характеризующих рост, обусловленный поступлением благ в экономику из окружающей среды, внутренним производством благ и внешнеторговыми операциями. В свою очередь, в каждом из этих компонентов можно выде-

¹ Вопрос о том, следует ли трактовать это утверждение как аргумент в пользу неправомочности разделения стоимости материальных и нематериальных активов на балансах предприятий, требует дополнительного изучения. Нельзя исключать, что с теоретической точки зрения нематериальные активы представляют собой блага, а не знания. Пока ещё не предложено формального метода решения вопроса о том, является ли тот или иной нематериальный актив благом или отражает знание.

лить рост, обусловленный изменением вектора стоимости благ, и рост, обусловленный изменением количеств благ, например:

$$\frac{\lambda_{kt} \cdot (B_{kt} - B_{kt-1})}{\lambda_{kt-1} \cdot B_{kt-1}} = \frac{\lambda_{kt} \cdot B_{kt-1}}{\lambda_{kt-1} \cdot B_{kt-1}} \times \frac{\lambda_{kt} \cdot (B_{kt} - B_{kt-1})}{\lambda_{kt} \cdot B_{kt-1}}, \quad (9)$$

где $\lambda_{kt} = (\lambda_{ikt})$.

Прирост абсолютных величин показателей размера экономической системы также можно представить как сумму трёх вышеназванных компонентов, которые далее можно анализировать методом цепных подстановок с целью установить эффект изменения количества благ, их стоимости и совместного действия обоих факторов.

5. Заключение

Размер экономической системы, как явствует из проведённого анализа, есть её объективно существующий атрибут, вполне поддающийся конкретизации при посредстве теоретического анализа математической модели. Это не значит, что практическое измерение размера экономической системы — лёгкая задача. Очевидно, что модель мирового хозяйства, описанная выше, практически не допускает числовой реализации. Однако несомненная потребность в исчислении показателей, о которых идёт речь в статье (точнее, приближений к ним) имеется.

Частично эта потребность удовлетворяется существующей статистикой. Показатели валового внутреннего продукта, валового национального продукта, чистого национального продукта в известной степени коррелируют с размером экономической системы, но необходим дополнительный анализ содержания этих показателей для того, чтобы установить:

- ♦ примерный размер количественной ошибки характеристики размера экономической системы этими показателями при тех или иных дополнительных условиях;
- ♦ границы применимости данных показателей для решения задач, требующих информации о размере экономической системы;

- ♦ пути совершенствования методологии расчёта этих показателей и разработки других показателей, которые бы точнее характеризовали размер экономики либо имели меньше ограничений по их использованию.

Описанная в статье модель представляется адекватной теоретической основой для такого анализа.

Другое направление состоит в непосредственном использовании метода экономико-математического моделирования для оценки размера экономических систем. Его реализация требует слишком больших затрат; их целесообразность далеко не очевидна. Разработка теоретической конструкции и информационной базы математической модели, приемлемой для целей практической реализации — задача нерешённая. Но принципиальная возможность подхода к измерению экономики, основанном на методе моделирования, существует, и при определённых возможностях реализация этой возможности может оказаться целесообразной.

Библиографический список

1. Гатаулин А.М. Проблемы формирования полных общественных издержек сельскохозяйственной продукции (методология измерения и прикладные аспекты использования): Дисс. д.э.н. М., 1980. — 360 с.
2. Гранберг А.Г. Анализ и планирование межотраслевых связей (экономико-математическое исследование). Дисс. д.э.н. Новосибирск, 1968.
3. Канторович Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1960.
4. Лурье А.Л. Абстрактная модель оптимизации народнохозяйственного процесса и объективно обусловленные оценки // Экономика и математические методы, т. 2, 1966, вып. 1. — С. 12-30.
5. Немчинов В.С. Общественная стоимость и плановая цена: Избр. произв. М.: Наука, 1969.

6. Пауль Т.В. Повышение экономической и энергетической эффективности производства зерна (на примере Казахстана): Дисс. к.э.н. М., 1998.
7. Светлов Н.М. Влияние информационных процессов на предпочтения // Труды научной конференции молодых учёных и специалистов ТСХА 6-8 июня 2000 г. М., 2000. (Рукопись депонирована во ВНИИТЭИАгропром)
8. Светлов Н.М. Применение балансовой модели непропорционально растущей экономической системы для изучения условий измеримости экономического роста и уровня инфляции // Научная конференция молодых ученых и специалистов ТСХА 10-11 июня 1997 г.: Тезисы докладов. М.: Изд-во МСХА, 1999. — С. 400-404.
9. Светлов Н.М. Стоимость в теории систем и в экономике. М., 2001 (Рукопись депонирована во ВНИИТЭИАгропром).
10. Светлов Н.М. Техничко-экономическая интерпретация объективно обусловленных оценок // Актуальные проблемы повышения экономической эффективности сельскохозяйственного производства: Сборник трудов научной конференции молодых ученых и специалистов экономического факультета ТСХА 25 июня 1996 г. М., 1996. (Рукопись депонирована в НИИТЭИАгропром).
11. Струмилини С.Г. К определению стоимости и её применению в условиях социализма // Вопросы экономики, 1959, №8.
12. Debreu G. Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. Wiley, 1959.
13. Gittinger J.P. Economic analysis of agricultural projects. Baltimore.: Johns Hopkins University Press, 1984.
14. Neumann J. Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerischen Fixpunktsatzes // Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 1937, #8, s. 73-83.
15. Walras L. Elements of Pure Economies. L., 1954.

Приложение

1. Некоторые математические обозначения, используемые в статье.
Для обозначения векторов используются строчные, а матриц — заглавные латинские или греческие буквы, выделенные жирным шрифтом.
 $\mathbf{a} = (a_i)$ — вектор \mathbf{a} , состоящий из компонентов a_i .
 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — матрица \mathbf{A} , состоящая из компонентов a_{ij} .
 $(\mathbf{a} | \mathbf{b})$ — слияние (конкатенация) векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .
 $\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{a}(x)$ — вектор-функции векторного и скалярного аргументов.
 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ — скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .
 $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ — отношение порядка на множестве векторов, означающее, что ни один из компонентов \mathbf{a} не меньше соответствующего компонента \mathbf{b} и хотя бы один больше.
 \wedge, \vee — логическое умножение (u) и сложение ($u \vee v$).
 \subseteq — оператор включения или совпадения множеств.
2. Матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ называется связной, если не существует таких $I' \subseteq I$ и $J' \subseteq J$, где I и J — множества её строк и столбцов соответственно, что $(i \in I' \wedge j \notin J') \vee (j \in J' \wedge i \notin I') \Rightarrow a_{ij} = 0$.
3. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ — дифференцируемые вектор-функции векторного аргумента, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)$ — вектор того же порядка, что и $\mathbf{q}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_k)$ — вектор того же порядка, что и $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.
Функцией Лагранжа задачи
$$\Phi = \begin{cases} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}); \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{cases} \quad (10)$$
называется функция $\langle -\boldsymbol{\mu}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle + \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q}(\mathbf{x}) \rangle$ [7].
Точкой Куна-Таккера задачи (10) называется тройка $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$, для которой выполняются условия Куна-Таккера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) &\geq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \mu_k}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \geq 0, \\ \lambda_i^* \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) &= 0, \quad \lambda_i^* \frac{\partial L}{\partial \mu_k}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = 0, \\ i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K, \end{aligned} \quad (11)$$

где I — множество индексов компонентов вектор-функции $\mathbf{q}(\mathbf{x})$, J — множество индексов компонентов вектора \mathbf{x} , K — множество индексов компонентов вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Оптимум по Парето задачи (10) может находиться только в её точке Куна-Таккера.

Если $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ — точка Куна-Таккера, то при $k > 0$ $(\mathbf{x}^*, k\boldsymbol{\lambda}^*, k\boldsymbol{\mu}^*)$ тоже является точкой Куна-Таккера.

Множителями Лагранжа задачи (0) называются величины λ_i и μ_k .

Из известного результата А.Л. Лурье [4] следует, что экономическая интерпретация таких множителей Лагранжа аналогична интерпретации множителей Лагранжа задачи математического программирования, решаемой по единственному критерию. В частности, в состоянии оптимума по Парето они имеют смысл объективно обусловленных оценок благ или потребностей.

4. Функциональной матрицей задачи Φ в точке \mathbf{x}^* при условии, что $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ — точка Куна-Таккера, будем называть матрицу

$$\text{func}(\Phi, \mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} a_{kj} \\ \dots \\ a_{ij} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где $a_{kj} = \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_j}$, $a_{ij} = \frac{\partial q_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$, полагая $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_k(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} = (x_j)$, $i \in I^B$, $j \in J^B$, где I^B — множество индексов всех компонентов вектор-функции $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (q_i(\mathbf{x}))$, кроме тех, для которых $q_i(\mathbf{x}) \neq 0$, а J^B — множество переменных, для которых соответствующий вектор $(a_{kj} \mid a_{ij})$ не является нулевым.

Если \mathbf{x}^* — точка Куна-Таккера задачи (10), то соответствующий вектор множителей Лагранжа $(\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{\lambda}^B)$, где $\boldsymbol{\lambda}^B$ — вектор множителей Лагранжа компонентов $\mathbf{q}(\mathbf{x})$, индексы которых входят в I^B , может быть определён из системы уравнений $(\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{\lambda}^B)$ и $\text{func}(\Phi, \mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Все множители Лагранжа, не входящие в $(\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{\lambda}^B)$, согласно условиям Куна-Таккера, равны нулю. Поскольку эта система вырождена, то наряду с $(\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{\lambda}^B)$ её решением будет $k(\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{\lambda}^B)$, $k \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R} — множество вещественных чисел). В $\text{func}(\Phi, \mathbf{x}^*)$ число строк всегда превышает число столбцов не менее чем на единицу. Если число строк в $\text{func}(\Phi, \mathbf{x}^*)$ превышает число столбцов более чем на единицу или если $\text{func}(\Phi, \mathbf{x}^*)$ не является связной, то существуют альтернативные векторы $(\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{\lambda}^B)$, отличающиеся не только масштабирующим коэффициентом.

5. Рассмотрим задачу скалярной оптимизации, основанную на Φ :

$$\begin{cases} \max_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{f}^T(\mathbf{x}); \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \end{cases} \quad (13)$$

При любом $\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0}$ её оптимум окажется одним из оптимумов по Парето задачи Φ , причём множители Лагранжа последней, относящиеся к компонентам вектора $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, совпадут с соответствующими компонентами вектора $\boldsymbol{\mu}$. Следовательно, в рамках задач анализа множителей Лагранжа форма F с точки зрения множителей Лагранжа является более общей, чем (13). Если некоторое утверждение, касающееся множителей Лагранжа, верно для Φ , то оно верно и для (13), что снижает в экономической интерпретации вопрос о том, насколько правомерно опущены имеющиеся, возможно, в действительности соизмерители между целями, представленными в модели независимыми. Наличие таких соизмерителей лишь ограничит множество оптимумов по Парето (возможно, до единственной точки), которые могут быть достигнуты моделируемой экономической системой, но не отразится на остальных выводах, касающихся множителей Лагранжа.